# 目录

# 第 01 讲　数字特性法

## 一、整除判定及余数基本法则

### 1.能被 2、4、8、5、25、125 整除的数的数字特性

能被 2（或 5）整除的数，末一位数字能被 2（或 5）整除；

能被 4（或 25）整除的数，末两位数字能被 4（或 25）整除；

能被 8（或 125）整除的数，末三位数字能被 8（或 125）整除；

一个数被 2（或 5）除得的余数，就是其末一位数字被 2（或 5）除得的余数；

一个数被 4（或 25）除得的余数，就是其末两位数字被 4（或 25）除得的余数；

一个数被 8（或 125）除得的余数，就是其末三位数字被 8（或 125）除得的余数。

### 2.能被 3、9 整除的数的数字特性

**能被 3（或 9）整除的数，各位数字和能被 3（或 9）整除。**

**一个数被 3（或 9）除得的余数，就是其各位相加后被 3（或 9）除得的余数。**

在判断 3 或 9 的倍数的时候，有以下几点非常重要的原则：

1） 判断一个数是不是 9 的倍数，可以用这个数字的各位之和来判断；

2） 判断一些数加起来是不是 9 的倍数的时候，可以将这些数的各位数字加起来进行判断，比如判断 23+13 是不是 9 的倍数，直接判断 2+3+1+3 就可以了；

3） 如果式子中有减法，可以将每个数用其各位数字之和来代替，再进行计算，比如说判断 25-13 是不是 9 的倍数，就等同于判断 7-4 是不是 9 的倍数；

4） 判断一个数除以 9 的余数是多少，也可以按照以上原则来进行；

5） 判断一个数是不是 3 的倍数，或者除以 3 的余数是多少，也可以按照上面原则来进行；

6） 只有判断 3 或者 9 的倍数（余数）时，才能将一个数的各位数字相加，而判断其他倍数时，不能做这样的操作，所以**当一个题出现“各位数字之和”这样的描述时，往往与 3 或者 9 的倍数（余数）相关。**

### 3.能被 6 整除的数的数字特性

能被 6 整除的数，就是能被 3 整除的偶数。

### 4. 7/11/13 整除判定基本法则

一个数是 7/11/13 的倍数，当且仅当其末三位数，与剩下的数之差为 7/11/13 的倍数。

【例】12047 末三位“047”与“12”差“35”能被 7 整除；12047 能被 7 整除

35 不能被 11，13 整除，则 12047 也不能被 11，13 整除。

### 5.余数基本原则

**两数之和的余数与余数的和同余；两数之差的余数与余数的差同余**

**两数之积的余数与余数的积同余**

【例】15÷7 余数是 1,18÷7 余数是 4
15+18=33，33÷7=4……5，余数与（1+4）÷7 的余数相同
18-15=3，3÷7=0……3 余数与（4-1）÷7 的余数相同
15×18=270，270÷7=38……4，余数与 1×4÷7 的余数相同

**二、数的整除性质**

**性质 1:传递性。a 能被 b 整除，b 能被 c 整除→a 能被 c 整除。**

【例 1】42 能被 14 整除，14 能被 7 整除，42 能被 7 整除。

**性质 2:可加减性。如果 a 能被 c 整除,b 能被 c 整除则 a+b、a-b 均能被 c 整除。**

【例 2】18 能被 3 整除，9 能被 3 整除，18+9=27，18-9=9，也都能被 3 整除。

**性质 3:如果 a 能被 c 整除，m 为任意整数，则 a•m 也能被 c 整除。**

【例 3】39 能被 13 整除，15 为整数，39×15 也能被 13 整除。

**性质 4:如果 a 能被 b 整除，a 能被 c 整除，且 b 和 c 互质，则 a 能被 b•c 整除。**

【例 4】162 能被 2 整除，也能被 9 整除，且 2 和 9 互质，162 能被 9×2=18 整除。

**性质 5:如果 a•b 能被 c 整除，且 a 和 c 互质，则 b 能被 c 整除。**

【例 5】2×9=18 能被 3 整除，2 与 3 互质， 9 能被 3 整除。

## 题型一、直接倍数

1. 下列四个数都是六位数，X 是比 10 小的自然数，Y 是零，一定能同时被 2、3、5 整除的数是多少？（　　）

A. XXXYXX　　B. XYXYXY　　C. XYYXYY　　D. XYYXYX

2. 一张旧发票上写有 72 瓶饮料，总价为 x67.9y 元，由于两头的数字模糊不清，分别用 x,y 表示，每瓶饮料的单价也看不清了，那么 x=(　　)。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

3. 某单位招录了 10 名新员工，按其应聘成绩排名 1 到 10，并用 10 个连续的四位自然数依次作为他们的工号。凑巧的是每个人的工号都能被他们的成绩排名整除，问排名第三的员工工号所有数字之和可能是多少？（　　）

A. 9　　B. 12　　C. 15　　D. 18

4. 某公司三名销售人员 2011 年的销售业绩如下：甲的销售额是乙和丙销售额的 1.5 倍，甲和乙的销售额是丙的销售额的 5 倍，已知乙的销售额是 56 万元，则甲的销售额是（　　）万元。

A. 140　　B. 144　　C. 98　　D. 112

5. 某商场促销，晚上八点以后全场商品在原来折扣基础上再打 9.5 折，付款时满 400 元再减 100 元，已知某鞋柜全场 8.5 折，某人晚上九点多去该鞋柜买了一双鞋，花了 $\boxed{384.5}$ 元，问这双鞋的原价为多少钱?（　　）

A. 550　　B. 600　　C. 650　　D. 700

6. 某种汉堡包每个成本 $\boxed{4.5}$ 元，售价 $\boxed{10.5}$ 元，当天卖不完的汉堡包即不再出售。在过去十天里，餐厅每天都会准备 200 个汉堡包，其中有六天正好卖完，四天各剩余 25 个，问这十天该餐厅卖汉堡包共赚了多少元?（　　）

A. 10850　　B. 10950　　C. 11050　　D. 11350

7. 高校的科研经费按来源分为纵向科研经费和横向科研经费，某高校机械学院 2015 年前 4 个月的纵向科研经费和横向科研经费的数字从小到大排列为 20、26、27、28、31、38、44 和 50 万元。如果前 4 个月纵向科研经费是前 3 个月横向科研经费的 2 倍，则该校机械学院 2015 年第 4 个月的横向科研经费是多少万元？（　　）

A. 26　　B. 27　　C. 28　　D. 31

8. 某店一共进货 6 桶油，分别为 15、16、18、19、20、31 千克，上午卖出 2 桶，下午卖出 3 桶，下午卖的重量正好是上午的 2 倍。那么，剩下的一桶油重多少千克?（　　）

A. 15　　B. 16　　C. 18　　D. 20

9. 某汽车厂商生产甲、乙、丙三种车型，其中乙型产量的 3 **倍**与丙型产量的 6 **倍**之和等于甲型产量的 4 **倍**，甲型产量与乙型产量的 2 **倍**之和等于丙型产量的 7 **倍**。则甲、乙、丙三型产量之比为（　　）。

A.5：4：3　　B.4：3：2　　C.4：2：1　　D.3：2：1

## 题型二、因子倍数

10.　一单位组织员工乘车去泰山，要求**每辆**车上的员工数相等。起初**每辆**车 22 人，结果有一人无法上车；如果开走一辆车，那么所有的旅行者正好能**平均**乘到其余各辆车上。已知**每辆**最多乘坐 32 人，请问单位有多少人去了泰山？(　　)

A.269　　B.352　　C.478　　D.529

11.　某单位组织职工参加团体操表演，表演的前半段队形为中间一组 5 人，其他人按**每 8 人**一组围在外圈；后半段队形变为中间一组 8 人，其他人按**每 5 人**一组围在外圈。该单位职工人数为 150 人，则最多可有多少人参加?

A.149　　B.148　　C.138　　D.133

12.　某制衣厂接受一批服装订货任务，按计划天数进行生产，如果**每天**平均生产 20 套服装，就比订货任务少生产 100 套；如果**每天**生产 23 套服装，就可超过订货任务 20 套。那么，这批服装的订货任务是多少套?（　　）

A．760　　B．1120　　C．900　　D．850

13.　王明抄写一份报告，如果**每分钟**抄写 30 个字，则用若干小时可以抄完。当抄完$\frac{2}{5}$时，将工作效率提高 40%，结果比原计划提前半小时完成。问这份报告共有多少字？

A.6025　　B.7200　　C.7250　　D.5250

## 题型三、比例倍数

如果 a∶b=m∶n（m，n 互质），则 a 占 m 份，a 是 m 的倍数；b 占 n 份，b 是 n 的倍数。

48:28=12:7　　　　　48 占 12 份，每份是 4，48 是 12 的倍数；

　　　　　　　　　　28 占 7 份，每份 4，28 是 7 的倍数

如果 a $=\frac{m}{n}$b（m，n 互质），则 a 是 m 的倍数；　b 是 n 的倍数。

48=$\frac{12}{7}\times$28 ，　　　　48 是 12 的倍数；28 是 7 的倍数

如果 a∶b=m∶n（m，n 互质），则 a±b 占 m±n 份，a±b 应该是 m±n 的倍数。

48:28=12:7，　　　　　48±28 占 12±7 份，48±28 是 12±7 的倍数。

14. 甲、乙两辆车分别从 P、Q 两地同时出发，相向而行。相遇时，甲车比乙车多行驶 36 千米，乙车所行驶路程为甲车所行驶路程的$\frac{4}{7}$，则 P、Q 两地相距（　　）千米。

A.72　　B.96　　C.112　　D.132

15. 某公司去年有员工 830 人，今年男员工人数比去年减少 6%，女员工人数比去年增加 5%，员工总数比去年增加 3 人，问今年男员工有多少人？（　　）

A.329　　B.350　　C.371　　D.504

16. 两个派出所某月内共受理案件 160 起，其中甲派出所受理的案件中有 17%的刑事案件，所以乙派出所受理的案件中有 20%是刑事案件，问乙派出所在这个月中共受理多少起非刑事案件？（　　）

A.48　　B.60　　C.72　　D.96

17. 某企业共有职工 100 多人，其中，生产人员与非生产人员的人数之比为 4：5，而研发与非研发人员的人数之比为 3：5，已知生产人员不能同时担任研发人员，则该企业不在生产和研发两类岗位上的职工有多少人？（　　）

A.20　　B.30　　C.24　　D.26

18.　　某企业原有职工 110 人，其中技术人员是非技术人员的 10 倍。今年招聘后，两类人员的人数之比未变，且现有职工中技术人员比非技术人员多 153 人。问今年新招非技术人员多少名？（　　）

A.7　　　　　B.8　　　　　C.9　　　　D.10

19.　　甲、乙、丙、丁四人为地震灾区捐款，甲捐款数是另外三人捐款总数的一半，乙捐款数是另外三人捐款总数的$\frac{1}{3}$，丙捐款数是另外三人捐款总数的$\frac{1}{4}$，丁捐款 169 元。问四人一共捐了多少钱？（　　）

A.780 元　　　　B.890 元　　　　C.1183 元　　　　D.2083 元

20.　　某超市购入每瓶 200 毫升和 500 毫升两种规格的沐浴露各若干箱，200 毫升沐浴露每箱 20 瓶，500 毫升沐浴露每箱 12 瓶，定价分别为 14 元/瓶和 25 元/瓶。货品卖完后，发现两种规格沐浴露销售收入相同，那么这批沐浴露中，200 毫升的最少有几箱？（　　）

A.3　　　　　B.8　　　　　C.10　　　　　D.15

## 题型四：公倍数与公约数

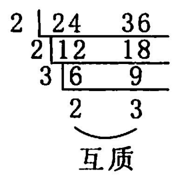
1．在整数范围内，如果满足M/N＝P，则称“N能整除M”或“M能被N整除”。此时，M为N的倍数，N为M的因数(也称N是M的约数)。

2．能同时整除一组数中的每一个数的数，称为这组数的公因数（公约数）；能同时被一组数中每一个数整除的数，称为这组数的公倍数。

**求取方法：**

**1．两个数最大公约数和最小公倍数的求取方法**

一般采用短除法，即用共同的质因数连续去除，直到所得的商互质为止。把共同的质因数连乘起来，就是这两个数的最大公约数。把共同的质因数和各自独有的质因数连乘起来，就是这两个数的最小公倍数。



如：求24、36的最大公约数与最小公倍数。

24、36的最大公约数为其共同质因数的乘积，即2×2×3=12；24、36的最小公倍数为其共同质因数及独有质因数的乘积，即(2×2×3)×(2×3)＝72。

**2．三个数最大公约数和最小公倍数的求取方法**

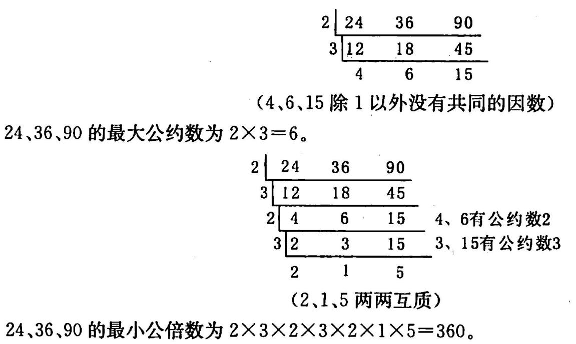
求取三个数的最大公约数时，短除到三个数没有共同的因数(除1外)，然后把所有共同的质因数连乘起来。

求取三个数的最小公倍数时，短除到三个数两两互质，然后把共同的质因数和各自独有的质因数连乘起来。

如：求24、36、90的最大公约数和最小公倍数。

24、36、90的最大公约数为2×3=6

24、36、90的最小公倍数为2×3×2×3×2×1×5=360。




**（1）如果a、b互质,a和b的最大公约数是1，最小公倍数是a•b。**

如:4和5互质， 最大公约数为1，最小公倍数为4×5=20。

**（2）如果a是b的倍数，则a和b的最大公约数是b，最小公倍数是a。**

如:10是5的倍数，最大公约数为5，最小公倍数为10。

**（3）a、b是任意的两个正整数，则a和b的最大公约数与最小公倍数的乘积等于a•b。**

如:4和6的最大公约数是2，最小公倍数是12，2×12=24=4×6。

**分数的最大公约数$=\frac{\text{分子的最大公约数}}{\text{分母的最小公倍数}}$　分数的最小公倍数$=\frac{\text{分子的最小公倍数}}{\text{分母的最大公约数}}$**

21.　有一种红砖，长 24 厘米、宽 12 厘米、高 5 厘米，问至少用多少块这种砖才能拼成一个实心的正方体?(　　)

A.600 块　　B.1200 块　　C.1800 块　　D.2400 块

22.有一种长方形小纸板，长为 29 毫米，宽为 11 毫米。现在用同样大小的这种小纸板拼合成一个正方形，问最少要多少块这样的小纸板?(　　)

A.197 块　　B.192 块　　C.319 块　　D.299 块

23. 有两种药分别重$\frac{25}{6}$千克、$\frac{15}{8}$千克，将这两种药分别平均分成若干份，并且两种药每份的重量也是相等的，那么请问至少分成了多少份？（　　）

A. 9　　B. 19　　C. 29　　D. 39

24. 某化学生产厂商生产甲、乙、丙三种试剂，其中:甲试剂每瓶重$\frac{2}{15}$克，乙试剂每瓶重$\frac{4}{21}$克，丙试剂每瓶重$\frac{8}{35}$克。现在需要分别购买这三种试剂若干瓶，使得最后购买得到的三种试剂的总重量相等，那么至少需要购买这三种试剂共多少瓶？（　　）

A. 197　　B. 137　　C. 97　　D. 67

## 五、综合特性

### （一）奇偶运算基本法则

**偶数**:能被 2 整除的数是偶数，0 也是偶数；　**奇数**:不能被 2 整除的数是奇数。

两个整数在进行加法、减法、乘法运算时，奇偶性的运算规律如下：

| 加减规律 | 乘法规律 |
|---|---|
| **同奇同偶则为偶，一奇一偶则为奇** | **乘数有偶则为偶，乘数无偶则为奇** |
| 偶数±奇数=奇数 | 偶数×奇数=偶数 |
| 奇数±奇数=偶数 | 奇数×奇数=奇数 |
| 偶数±偶数=偶数 | 偶数×偶数=偶数 |

**推论**

①任意两个数的和如果是奇数，那么差也是奇数；如果和是偶数，那么差也是偶数。

②任意两个数的和或差是奇数，则两数奇偶相反；和或差是偶数，则两数奇偶相同。

③奇数个奇数的和=奇数；偶数个奇数的和=偶数

25. 某次测验有 50 道判断题，每做对一题得 3 分，不做或做错一题倒扣 1 分，某学生共得 82 分，问答对题数和答错题数（包括不做）相差多少？

A. 33　　B. 39　　C. 17　　D. 16

**奇偶特性在解不定方程中的应用**

“一个方程，两个未知数”就是不定方程，形如 ax+by=c (约去 a、b、c 的最大公约数，至最简形式)。其中，未知数 x、y，以及 a、b、c 均为整数，通过题中其他限制条件以及选项，就可以确定未知数的取值，实现“在一个方程中解出两个未知数。”

因为在不定方程中 a，b，c 是已知的，所以可以根据奇数与偶数的运算性质判断的奇偶性以缩小解的范围（**结合尾数特性，余数特性**）。

判断规则如下表：

<table>
<tr><td rowspan="5">ax+by=c</td><td>已知条件</td><td>结论</td></tr>
<tr><td>a、b、c 均为奇数</td><td>x、y 中一个是奇数，一个是偶数<br>A. 10　12　　B. 14　18<br>C. 13　14　　D. 16　18</td></tr>
<tr><td>a、b 为奇数，c 为偶数</td><td>x、y 都是奇数或者 x、y 都是偶数<br>A. 11　12　　B. 15　18<br>C. 13　15　　D. 17　18<br>或者<br>A. 10　13　　B. 15　18<br>C. 12　14　　D. 17　18</td></tr>
<tr><td>a 为奇数、b 为偶数、c 为奇数</td><td>x 为奇数，y 不能确定奇偶性<br>A. 11　13　　B. 14　15<br>C. 12　14　　D. 16　17</td></tr>
<tr><td>a 为奇数、b 为偶数、c 为偶数</td><td>x 为偶数，y 不能确定奇偶性<br>A. 11　14　　B. 13　18<br>C. 12　14　　D. 15　18</td></tr>
</table>

ax+by=c $\rightarrow \begin{cases} ax = c - by \\ by = c - ax \end{cases}$

26. 装某种产品的盒子有大、小两种，大盒每盒能装 11 个，小盒每盒能装 8 个，要把 89 个产品装入盒内，要求每个盒子都恰好装满，需要大、小盒子各多少个？（　　）

A.3　7　　B.4　6　　C.4　5　　D.6　3

## （二）数的质合性

**1. 定义**

**质数**:只能被 1 和其本身整除的正整数。如:17 只能被 1 和 17 整除，则 17 是质数。

**合数**:除了 1 和其本身，还可以被其他整数整除的正整数。如:6 除了能被 1 和 6 整除以外，还能被 2 和 3 整除，则 6 是合数。

**互质**:除了 1 以外，不能同时被其他整数整除的两个正整数互质。如:2 和 9 除了 1 以外，不能同时被其他整数整除，则 2 和 9 互质。

**2. 性质**

1 既不是质数也不是合数，**2 是唯一的一个偶质数。**

20 以内的质数有:2、3、5、7、11、13、17、19。

**考试中对数的质合性的考查往往与数的奇偶性、整除性相结合。**

27.　　一个质数的 3 倍与另一个质数的 2 倍之和等于 20，那么这两个质数的和是（　　）。

A. 9　　　　B. 8　　　　C. 7　　　　D. 6

28.　　某村村民经过集体投票民主选举村干部，5 位村干部候选人中得票最高者将当选。经统计，本次选举有效选票一共 395 票，且当选者的得票数比其他 4 位候选人的平均得票数要多 60 票，则这名当选者一共获得（　　）票。

A. 62　　　　B. 67　　　　C. 122　　　　D. 127

29.　　某地劳动部门租用甲、乙两个教室开展农村实用人才培训。两教室均有 5 排座位，甲教室每排可坐 10 人，乙教室每排可坐 9 人。两教室当月共举办该培训 27 次，每次培训均座无虚席，当月培训 1290 人次。问甲教室当月共举办了多少次这项培训?(　　)

A. 8　　　　B. 10　　　　C. 12　　　　D. 15

30.　　一群大学生进行分组活动，要求每组人数相同，若每组 22 人，则多出一人未分进组，若少分一组，则恰好每组人数一样多，已知每组人数最多只能 32 人，则该群学生总人数是（　　）。

A. 441　　　　B. 529　　　　C. 536　　　　D. 528

## 附：倍数关系的扩展－和差倍原理（年龄问题）

1.两人的年龄差不变。

2.同时都增加同一自然数量。

（一）年龄问题用**差倍**问题解答时，要抓住“差不变”这个关键，因为大、小两人的年龄不管“几年前”或，“几年后”，这两个年龄的差总是不变的，然后用“年龄差÷年龄的倍数差”算出作为当时的一倍数的年龄，再算出当时的几倍数年龄，最后算出现在两人的年龄各是几岁。

1.小红今年比妈妈小 24 岁，妈妈年龄正好是小红的 3 倍，小红和妈妈今年各是几岁？

分析：小红今年比妈妈小 24 岁，妈妈年龄正好是小红的 3 倍，妈妈年龄比小红大（3－1）倍。可用“年龄差除以倍数差”求出小红的年龄，再求出妈妈年龄。

解：24÷（3－1）＝12（岁）——小红

12×3＝36（岁）　　　——妈妈

2.小明的爸爸今年 40 岁，小明 8 岁，问几年后爸爸的年龄是小明的 3 倍？

分析：小明的爸爸今年 40 岁，小明 8 岁，今年两人相差（40－8）岁，几年以后，爸爸和小明增加了同样的岁数，两人的年龄还是相差（40－8）岁，这是解答这类问题的关键，这时爸爸的年龄是小明的 3 倍，两人相差（3－1〕倍，可用差倍问题的解法求出几年后小明的年龄，最后求出经过了几年爸爸的年龄才是小明的 3 倍。

解：（40－8）÷（3－1）＝16（岁）——几年后小明的年龄

16－8＝8（年）——几年后爸爸的年龄是小明的 3 倍

（二）当年龄问题用**和倍**问题解答时，要先算出两人的年龄和，然后用“年龄和÷年龄的倍数和”，求出当时两人的年龄，最后算出现在两人的年龄各是几岁。

1．小玲和爷爷今年的年龄和是 78 岁，爷爷的年龄是小玲的 5 倍，两人今年各是几岁？

分析：78 岁是小玲和爷爷的年龄和，（1+5）倍是小玲和爷爷年龄的倍数和，可用“两人的年龄和÷两人的倍数和”求出今年小玲的年龄，再用乘法求出今年爷爷的年龄。

解：　78÷（1+5）＝13（岁）——小玲

13×5＝65（岁）——爷爷

2．三年前父子的年龄和是 49 岁，现在父亲的年龄是儿子的 4 倍，问父亲和儿子现在各是多少岁？

分析：现在父亲的年龄是儿的子 4 倍，两人的年龄和是（1+4）倍，三年前父子的年龄和是 49 岁，那么可推想得到现在父子的年龄和是（49+3×2）岁，可用和倍问题的解法求出现在父、子的年龄各是几岁。

解：（49＋3×2）÷（1+4）＝11（岁）——儿子

11×4＝44（岁）——父亲

（三）当年龄问题用**和差**问题解答时，要先算出两人的年龄和，确定两人的年龄差，用“（年龄和+年龄差）÷2”或“（年龄和－年龄差）÷2”求出当时的两人的年龄，最后算出两人现在的年龄各是几岁。

**核心提示**

如果已知两个数的和与差，那么**这两个数应该分别为和与差相加的一半、相减的一半。**这个结论非常重要，方便我们口算很多题目。

数学形式为：$\begin{cases} a+b=M \\ a-b=N \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=\frac{M+N}{2} \\ b=\frac{M-N}{2} \end{cases}$

**扩展：**$\begin{cases} \text{船速}+\text{水速}=\text{顺水速} \\ \text{船速}-\text{水速}=\text{逆水速} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{船速}=\frac{\text{顺水速}+\text{逆水速}}{2} \\ \text{水速}=\frac{\text{顺水速}-\text{逆水速}}{2} \end{cases}$

1．小刚今年 9 岁，小英今年 13 岁，当两人的年龄和是 40 岁时，两人各是多少岁？

分析：小刚今年比小英小（13－9）岁。当两人的年龄和是 40 岁时，他们的年龄差人仍是（13—9）岁。可用和差问题的方法求出当两人年龄和是 40 岁时，两人分别是几岁。

解：［40+（13-9）］÷2＝22（岁）　　　　小英的年龄

40-22＝18（岁）　　　　小刚的年龄

2．父亲比母亲大 2 岁，父亲比大儿子大 28 岁，比小儿子大 35 岁，当大儿子和小儿子的年龄和是 15 岁时，母亲应是多少岁？

分析：根据题意要求“当大儿子和小儿子的年龄和是 15 岁时，母亲是多少岁”，由爸爸比大儿子大 28 岁，爸爸比小儿子大 35 岁，可得大儿子比小儿子大（35—28）岁，可用和差问题的方法求出儿子的年龄，再求父亲的年龄，最后求母亲的年龄。

解：［15+（35-28）］÷ 2 ＝11（岁）——大儿子的年龄

11+28＝39（岁）——父亲的年龄；

39— 2 ＝37（岁）——母亲的年龄

## 常用阶乘数表

定义：n的阶乘写做n!,n!=1×2×3×4×…×（n-1）×n

| 数字 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 阶乘 | 1 | 2 | 6 | 24 | 120 | 720 | 5040 | 40320 | 362880 | 3628800 |

## 常用幂次表

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 平方数 | 底数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | |
| | 平方 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 | 49 | 64 | 81 | 100 | |
| | 底数 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | |
| | 平方 | 121 | 144 | 169 | 196 | 225 | 256 | 289 | 324 | 361 | 400 | |
| | 底数 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 | |
| | 平方 | 441 | 484 | 529 | 576 | 625 | 676 | 729 | 784 | 841 | 900 | |
| | 平方 | 31 | 32 | 33 | | | | | | | | |
| | 底数 | 961 | 1024 | 1089 | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | | | | |
| 立方数 | 底数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | 立方 | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 | 1000 | 1331 |
| | | | | | | | | | | | | |
| 多次方 | 次方 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| | 2 | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 | 2048 |
| | 3 | 3 | 9 | 27 | 81 | 243 | 729 | | | | | |
| | 4 | 4 | 16 | 64 | 256 | 1024 | | | | | | |
| | 5 | 5 | 25 | 125 | 625 | 3125 | | | | | | |
| | 6 | 6 | 36 | 216 | 1296 | 7776 | | | | | | |

# 基本计算技巧

## （一）错位相加/减

A×9 型速算技巧：A×9=A×10-A

A×99 型速算技巧：A×99=A×100-A

A×11 型速算技巧：A×11=A×10+A

A×101 型速算技巧：A×101=A×100+A

## （二）乘/除以 5、25、125 的速算技巧

A×5 型速算技巧：A×5=10A÷2；

A÷5 型速算技巧：A÷5=0.1A×2

A×25 型速算技巧：A×25=100A÷4

A÷25 型速算技巧：A÷25=0.01A×4

A×125 型速算技巧：A×125=1000A÷8

A÷125 型速算技巧：A÷125=0.001A×8

## （三）“多位特殊数 ”及其对应分数

$\frac{1}{2}$=0.5=50%

$\frac{1}{3}$=0.3333=33.33%　$\frac{2}{3}$=0.6667=66.67%

$\frac{1}{4}$=0.25=25%　$\frac{2}{4}$=0.5=50%　$\frac{3}{4}$=0.75=75%

$\frac{1}{5}$=0.2=20%　$\frac{2}{5}$=0.4=40%　$\frac{3}{5}$=0.6=60%　$\frac{4}{5}$=0.8=80%

$\frac{1}{6}$=0.1667=16.67%　$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$=0.3333=33.33%　$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$=0.5=50%

$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$=0.6667=66.67%　$\frac{5}{6}$=0.8333=83.33%

$\frac{1}{7}$=0.142857=14.2857%　$\frac{2}{7}$=0.285714=28.5714%

$\frac{3}{7}$=0.428571=42.8571%　$\frac{4}{7}$=0.571428=57.1428%

$\frac{5}{7}$=0.714285=71.4285%　$\frac{6}{7}$=0.857142=85.7142%

$\frac{1}{8}$=0.125=12.5%　$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$=0.25=25.0%　$\frac{3}{8}$=0.375=37.5%　$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$=0.5=50%

$\frac{5}{8}$=0.625=62.5%　$\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$=0.75=75%　$\frac{7}{8}$=0.875=87.5%

$\frac{1}{9}$=0.1111=11.11%　$\frac{2}{9}$=0.2222=22.22%　$\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$=0.3333=33.33%　$\frac{4}{9}$=0.4444=4 4.44%

$\frac{5}{9}$=0.5556=55.56%　$\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$=0.6667=66.67%　$\frac{7}{9}$=0.7778=77.78%　$\frac{8}{9}$=0.8889=88.89%

$\frac{1}{11}$=0.0909=9.09%　$\frac{2}{11}$=0.1818=18.18%　$\frac{3}{11}$=0.2727=27.27%　$\frac{4}{11}$=0.3636=36.36%

$\frac{5}{11}$=0.4545=45.45%　$\frac{6}{11}$=0.5454=54.54%　$\frac{7}{11}$=0.6363=63.63%　$\frac{8}{11}$=0.7272=72.72%

$\frac{9}{11}$=0.8181=81.81%　$\frac{10}{11}$=0.9090=90.90%

**课后练习：**

### 强化练习一

第一行为被除数，第一列为除数，请在中间空白处填写其余数。

| | 3736 | 9483 | 3847 | 4837 | 847 | 784 | 8739 | 889 | 6735 | 1203 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | | | | | | | | | | |
| 8 | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | |
| 9 | | | | | | | | | | |

在表格的左下部分填入对应两个数字的最大公约数，在表格的右上部分填入对应两个数字的最小公倍数。

### 强化练习二

| | 20 | 24 | 28 | 30 | 35 | 40 | 42 | 48 | 56 | 60 | 72 | 80 | 96 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | | | | | | | | | | | | | |
| 24 | | | | | | | | | | | | | |
| 28 | | | | | | | | | | | | | |
| 30 | | | | | | | | | | | | | |
| 35 | | | | | | | | | | | | | |
| 40 | | | | | | | | | | | | | |
| 42 | | | | | | | | | | | | | |
| 48 | | | | | | | | | | | | | |
| 56 | | | | | | | | | | | | | |
| 60 | | | | | | | | | | | | | |
| 72 | | | | | | | | | | | | | |
| 80 | | | | | | | | | | | | | |
| 96 | | | | | | | | | | | | | |

### 强化练习三

在下表最下一行，填写每列对应三个数字的最小公倍数。

| 数字一 | 8 | 9 | 8 | 14 | 72 | 54 | 42 | 21 | 108 | 150 | 4.8 | $\frac{9}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 数字二 | 10 | 15 | 9 | 35 | 15 | 27 | 70 | 63 | 144 | 324 | 3.2 | $\frac{63}{20}$ |
| 数字三 | 12 | 20 | 12 | 60 | 40 | 96 | 105 | 168 | 180 | 120 | 21.8 | $\frac{35}{6}$ |
| 最小公倍数 | | | | | | | | | | | | |

**课后真题练习**

1. 从 0,1,2,4,7 五个数中选出三个组成三位数，其中能被 3 整除的最大数和能被 5 整除的最小数之差为？（　　）

A. 618　　B. 621　　C. 649　　D. 729

2. 甲、乙、丙、丁四人共做零件 325 个。如果甲多做 10 个，乙少做 5 个，丙做的个数乘以 2，丁做的个数除以 3，那么四个人做的零件数恰好相等。丁做了多少个?（　　）

A. 180　B. 158　C. 175　D. 164

3. 有 8 只盒子装着圆珠笔、钢笔、铅笔和水彩笔，并且每只盒内都放有同一种笔。8 只盒子所装笔的支数分别为 17 支、23 支、33 支、36 支、38 支、42 支、49 支、51 支。在这些笔中，圆珠笔的支数是钢笔支数的 2 倍，钢笔支数是铅笔支数的 1/3，只有 1 只盒里放的是水彩笔。这盒水彩笔共有多少支?（　　）

A.23　B.38　C.42　D.49

4. 我国粮食总产量，新中国成立前的 1936 年是 8488 万吨，1949 年比 1936 年多 2830 万吨，1989 年比 1949 年的 3 倍还多 6801 万吨。1989 年我国粮食产量是多少万吨?（　　）

A.42875 万吨　B.40755 万吨　C.37625 万吨　D.39875 万吨

5. 水果店运来的西瓜个数是哈密瓜个数的 4 倍，如果每天卖 130 个西瓜和 36 个哈密瓜，那么哈密瓜卖完后还剩下 70 个西瓜。该店共运来西瓜和哈密瓜多少个?（　　）

A.225　B.720　C.790　D.900

6. A、B、C 三件衬衫的总价格为 520 元，若分别按 9.5 折、9 折、8.75 折出售，总价格为 474 元，A、B 两件衬衫的价格比为 5∶4。A、B、C 三件衬衫的价格分别是多少元?（　　）

A. 250，200、70　　B. 200、160、160

C. 150、120、250　　D. 100、80、340

7. 有货物 270 件，用乙型车若干，可刚好装完：用甲型车，可比用乙型车少出车 1 辆，且尚可再装 30 件。已知甲型车每辆比乙型车多装 15 件，甲型车每辆可装货多少件?（　　）

A. 40　B. 45　C. 50　D. 60

8. 请问 1000!(1000 的阶乘)末尾一共有多少个连续的“0”?（　　）

A.249　B.200　C.240　D.500

9. 小平在骑旋转木马时说：“在我前面骑木马的人数的$\frac{1}{3}$，加上在我后面骑木马的人数的$\frac{3}{4}$，正好是所有骑木马的小朋友的总人数。”请问，一共有多少小朋友在骑旋转木马？（　　）

A. 11　　B. 12　　C. 13　　D. 14

10. 甲、乙两仓库存货吨数比为 4:3，如果由甲库中取出 8 吨放到乙库中，则甲、乙两仓库存货吨数比为 4:5。两仓库原存货总吨数是多少？（　　）

A. 94　　B. 87　　C. 76　　D. 63

11. 甲、乙两人共有 260 本书，其中甲的书有 13%是专业书，乙的书有 12.5%是专业书，问甲有多少非专业书？（　　）

A. 75　　B. 87　　C. 174　　D. 67

12. 配置黑火药用的原料是火硝、硫磺和木炭。火硝的质量是硫磺和木炭的 3 倍，硫磺只占原料总量的 1/10 ，要配置这种黑火药 320 千克，需要木炭多少千克?(　　)

A. 48　　B. 60　　C. 64　　D. 96

13. 某人共收集邮票若干张，其中$\frac{1}{4}$是 2007 年以前的国内外发行的邮票，$\frac{1}{8}$是 2008 年国内发行的，$\frac{1}{19}$是 2009 年国内发行的，此外尚有不足 100 张的国外邮票。则该人共有(　　)张邮票。

A. 87　　B. 127　　C. 152　　D. 239

14. 一本书，小明已看了 130 页，剩下的准备 8 天看完。如果每天看的页数相等，3 天看的页数恰好是全书的$\frac{5}{22}$，这本书共有(　　)页。

A. 324　　B. 330　　C. 429　　D. 457

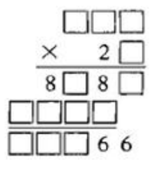
15. 一块镍铝合金重 500 克，放于水中称减少质量 32 克，已知镍在水中减轻$\frac{1}{19}$，铝在水中减轻$\frac{1}{10}$，则这块合金中镍铝的质量分别是(　　)。

A. 380 克；120 克　　B. 360 克；140 克

C. 340 克；160 克　　D. 320 克；180 克

16. 如右图，求算式的“积”是多少？(　　)

A. 27666　　B. 35066　　C. 90666　　D. 235666



17. 四个相邻质数的积为 17017，它们的和为？（　　）

A. 48　　B. 51　　C. 61　　D. 73

18. 甲、乙、丙三人打靶，每人打了 3 枪，三个人各自中靶的环数之积都是 60。按个人中靶的总环数由高到低排好，依次为甲、乙、丙，则靶上 4 环的那一枪是谁打的？(环数是不超过 10 的正整数)(　　)

A.甲　　B.乙　　C.丙　　D.无法判断

19. 张大伯卖白菜，开始定价是每千克 5 角钱，一点都卖不出去，后来每千克降低了几分钱，全部白菜很快卖了出去，一共收入 22.26 元，则每千克降低了几分钱？（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 6　　D. 8

20. 有 8 个盒子分别装有 17 个、24 个、29 个、33 个、35 个、36 个、38 个和 44 个乒乓球，小赵取走一盒，其余各盒被小钱、小孙、小李取走，已知小钱和小孙取走的乒乓球个数相同，并且都是小李取走的两倍，则小钱取走的各个盒子中的乒乓球可能是(　　)。

A.17 个，44 个　　B.24 个，38 个

C.24 个，29 个，36 个　　D.24 个，29 个，35 个

21. 下列可以分解为三个不同质数相乘的三位数是(　　)。

A.100　　B.102　　C.104　　D.125

22. 有一食品店某天购进了 6 箱食品，分别装着饼干和面包，重量分别为 8、9、16、20、22、27 公斤。该店当天只卖出一箱面包，在剩下的 5 箱中饼干的重量是面包的两倍，则当天食品店购进了(　　)公斤面包。

A.44　　B.45　　C.50　　D.52

23. 一个长方形的周长是 40，它的边长分别是一个质数和合数，这个长方形的面积最大是多少平方厘米？(　　)

A.36　　B.75　　C.99　　D.100

24. 甲班与乙班同学同时从学校出发去某公园，甲班步行的速度是每小时 4 千米，乙班步行的速度是每小时 3 千米。学校有一辆汽车，它的速度是每小时 48 千米，这辆汽车恰好能坐一个班的学生。为了使这两班学生在最短的时间内到达，那么，甲班学生与乙班学生需要步行的距离之比是（　　）。

A.15:11　　B.17:22　　C.19:24　　D.21:27

25. 甲、乙两种商品的价格比是 3：5，如果它们的价格分别下降 50 元，它们的价格比是 4：7，这两种商品原来的价格各为（ ）。

A.300 元，500 元　　B.375 元，625 元

C.450 元，750 元　　D.525 元，875 元

26. 哥哥和弟弟各有若干本书，如果哥哥给弟弟 4 本，两人的书一样多，如果弟弟给哥哥 2 本，哥哥的书是弟弟的 4 倍，哥哥和弟弟一共有( )本书。

A.20　B.9　C.17　D.28

27. 小李某月请了连续 5 天的年假，这 5 天的日期数字相乘为 7893600，问他最后一天年假的日期是（ ）。

A.25 日　B.26 日　C.27 日　D.28 日

## 精选真题练习参考答案

1. 【答案】B

【解析】能被 3 整除的最大整数应满足百位和十位的数字尽可能的大，并且与个位数字之和为 3 的倍数，因此组成的能被 3 整除的最大整数为 741。同理，组成的能被 5 整除的最小数为 120，故二者之差为 621。

2. 【答案】A。

【解析】丁做的个数除以 3，说明丁做的个数必定是 3 的整数倍。

3. 【答案】D。

【解析】假设钢笔共有 n 支，那么圆珠笔为 2n 支，而铅笔为 3n 支，这三种笔的总数 6n 肯定是 6 的倍数。8 盒笔的总数为 17+23+33+36+38+42+49+51=289，289 除以 6 余 1，那么去除钢笔、圆珠笔、铅笔这三种笔的总和(6 的倍数)，得到的水彩笔的总和也应该满足“除以 6 余 1”的条件，结合选项，选择 D。

4. 【答案】B。

【解析一】1989 年我国粮食产量为:(8488+2830)×3+6801，其末两位数字为“55”。。

[注一]尾数特性。

【解析二】“(8488+2830)×3+6801”明显含有 3 因子，所以选择 B。

[注二]因子特性。

5. 【答案】D。

【解析】水果店每天卖出 130+36=166 个瓜，然后剩下了 70 个瓜，说明该店运来的西瓜和哈密瓜总数应该有“166n+70”的形式，其尾数不可能为 5，排除 A 选项。后三个选项尾数都是“0”，于是我们猜测 n=5，代入得到:166×5+70=900，所以选择 D。

6. 【答案】B。

【解析】8.75 折$=\frac{7}{8}$，说明 C 衬衫的原价应该是 8 的整数倍，只有 B 满足。

7. 【答案】D。

【解析】根据题目条件可以知道，如果货物是 300 吨的话（270+30=300），用甲型车刚好可以装完。因此可以知道每辆甲型车的装载量只能是 50 或者 60。（因为 40 和 45 都不是 300 的约数。）

代入检验：50-15=35，而 35 不是 270 的约数，因此 50 不是答案。

8. 【答案】A。

【解析】N! 尾数一共有：$\frac{N}{5}+\frac{N}{25}+\frac{N}{125}+\frac{N}{625}+\cdots\cdots$(取整)

[点睛]本题可以直接这样计算=1000/5+1000/25+1000/125+1000/625=200+40+8+1=249

9. 【答案】C。

【解析】其他人的总数是 3、4 的倍数，是 12 人，加上小平共 13 人。

10. 【答案】D

【解析】甲、乙丙仓库房、存货之比为 4:3，总存货应该是 7 的倍数，选择 D。

11. 【答案】B。

12. 【答案】A。

【解析】火硝:(硫磺+木炭)=3: 1，那么火硝占 3 份，硫磺和木炭占 1 份，总共是 4 份 320 克，因此每份就是 80 克，硫磺和木炭占 1 份即总共 80 克，而硫磺占总量 320 克的 1/10 即 32 克，得到木炭占 80-32=48(克)。

13. 【答案】C。

【解析】很明显，答案应该是 4 的倍数，选择 C。

14. 【答案】B。

【解析】根据“3 天看的页数恰好是全书的$\frac{5}{22}$可知，全书页数一定是 22 的倍数。

15. 【答案】A。

【解析】镍在水中减轻$\frac{1}{19}$，那么镍的质量应该是 19 的倍数，选择 A。

16. 【答案】A。

【解析】两个乘数分别低于 1000 和 30，其乘积肯定低于 30000，故选择 A。

17. 【答案】A。

【解析】四个相邻质数（奇数），和一定为偶数。

17017＝17×1001，而1001恰好能被11整除，故17017可分解为17×11×91＝17×11×13×7，和为48。

18. 【答案】C。

【解析】根据“三个人各自中靶的环数之积都是60”，将60进行因数分解，有60=2×2×3×5。由于环数是不超过10的正整数，则打中4环的人中靶的环数只能为4、3、5，总环数为12，另外两个人中靶的环数只能为2、5、6和2、3、10或1、6、10，总环数分别为13、15、17。所以无论另外两个人中靶的环数是何种情况，打中4环的人的总环数排名都是第3名，应为丙。因此，选C。

19. 【答案】D。

20. 【答案】D。

【解析】小钱取走的乒乓球是小李的 2 倍，肯定是偶数，排除 A、C。如果 B 是正确答案，说明小钱取走了 24+38=62(个)，则小李应取走 31 个，显然 31 个是无法取走的，故排除 B，选择 D。

21. 【答案】B。

【解析】直接代入验证即可，100 和 104 都是 4 的倍数，分解质因数会出现两个 2 因子，排除，而 125 里有多个 5 因子，也排除。$102=2\times3\times17$，选择 B。

22. 【答案】D。

【解析】由“剩下的 5 箱中饼干的重量是面包的两倍”，说明剩下的饼干和面包的重量和应该是 3 的倍数，而 6 箱食品的总重量 8+9+16+20+22+27=102 为 3 的倍数，根据整除性质 2，卖出的一箱面包重量也为 3 的倍数，则重量只能是 9 或 27 公斤。

若卖出面包重量为 9 公斤，则剩下的面包重量为(102-9)÷3=31 公斤，题干数据不能凑出 31，排除。

若卖出面包重量为 27 公斤，则剩下的面包重量为(102-27)÷3=25 公斤，正好有 25=9+16 满足条件，则面包总重量为 27+25=52 公斤。

23. 【答案】C。

【解析】由长方形的周长为 40，那么它的长与宽之和是 40÷2=20。

将 20 表示成一个质数和一个合数的和，有三种情况:2+18、5+15、11+9。

易知该长方形的最大面积是 9×11=99。

24. 【答案】A。

【解析】甲班同学步行速度比乙班快，故甲班相对乙班应该步行距离更远，所以选择A。

[注释]大小特性。

25. 【答案】C

【解析】下降 50 元，后两者价格比为 4：7，说明乙商品价格减 50 后是 7 的倍数，只有 C 项满足。

26. 【答案】A

[解析]如果弟弟给哥哥 2 本，哥哥是弟弟的 4 倍，此时如果弟弟是 1 份，那么哥哥是 4 份，两人总和是 5 份，所以答案是 5 的倍数，选择 A。

27. 【答案】B

[解析]我们研究数字 7893600，是 3 的倍数，但不是 9 的倍数。直接代入选项，A 为 21×22×23×24×25，含 9 因子；C 为 23×24×25×26×27，含 9 因子；D 为 24×25×26×27×28，含 9 因子。直接排除这三个选项。

# 第 02 讲　代入排除法

## 课前导学

“代入排除法”结合题干与选项双向判断，是处理行测“客观单选题”最为行之有效的方法，还可以利用**数字的基本特性**来完成，特别是对**倍数**的判断。

**应用原则：**如果从题目到选项计算出正确答案比较困难，而从选项到题目反推去验证题目中的条件比较容易，一般使用代入法（题目所给条件较多）。

**应用范围：**多位数问题、不定方程问题、同余问题、年龄问题、周期问题、复杂行程问题、和差倍比问题（和倍问题，差倍问题，和差问题，比例问题）、分段计算问题、做对做错问题、鸡兔问题、极值问题等等。

1. 小王的旅行箱密码为3位数，且三个数字全是非0的偶数，而且这个三位数恰好是小王今年年龄的平方数。则小王今年（　　）岁。

A. 17　　B. 20　　C. 22　　D. 34

【解析】这是一道**多位数问题**，采用直接代入法。A项17的平方不满足三个数字都是偶数的情况，B项20的平方不满足“非0”的情况，D项34的平方为四位数，所以选择C。

2. 某市场运来苹果、香蕉、柚子和梨四种水果，其中苹果和柚子共30吨，香蕉、 柚子和梨共50吨。柚子占水果总数的$\frac{1}{4}$。一共运来水果多少吨？（　　）

A. 56吨　　B. 64吨　　C. 80吨　　D. 120吨

【解析】这是一道**比例问题**，采用直接代入法。根据“苹果和柚子共30吨，香蕉、柚子和梨共50吨”易知这四种水果的总量小于80吨，可直接排除C、D项；将A、B项分别代入题干，易知A项不成立，选择B。

3. 甲、乙两仓库各放集装箱若干个，第一天从甲仓库移出和乙仓库集装箱总数同样多的集装箱到乙仓库，第二天从乙仓库移出和甲仓库集装箱总数同样多的集装箱到甲仓库，如此循环，则到第四天后，甲、乙两仓库集装箱总数都是 48 个。问甲仓库原来有多少个集装箱？（　　）

A. 33　　B. 36　　C. 60　　D. 63

【解析】根据题意知甲、乙两仓库共有 96 个集装箱，第一天从甲仓库移出和乙仓库同样多的集装箱，所以甲的数量一定大于乙，排除 A、B 项。将 C 选项代入验证，明显不满足条件，故选择 D。

4.大型体育竞赛开幕式需要列队，共10排。导演安排演员总数的一半多一个在第一排，安排剩下演员人数的一半多一个在第2排……依次类推。如果在第10排恰好将演员排完，那么参与排队列的演员共有（　　）名。

A.2000　　B.2008　　C.2012　　D.2046

答案：D。[解析]代入A，第一次剩下2000-1000-1=999，剩下的是一个奇数，不满足第二排还要一半的要求，排除；代入B，第一次剩下2008-1004-1=1003，也不满足，排除；代入C，第一次剩下2012-1006-1=1005，同样不满足，排除。

5.10年前爸爸的年龄是他女儿的7倍，15年后爸爸的年龄是他女儿的2倍，请问女儿今年的年龄是多少？（　　）

A.14岁　　B.15岁　　C.16 岁　　D.17 岁

【解析】这一道**年龄问题**，采用直接代入法。1+1+1+1布局，居中代入。

代入B项，女儿今年15岁，10年前为5岁，则爸爸10年前是35岁，现在是45岁。15年后爸爸为60岁，女儿是30岁，正好是2倍。

6. 已知赵先生的年龄是钱先生年龄的2倍，钱先生比孙先生小7岁，三位先生的年龄之和是小于70的素数，且素数的各位数字之和为13，那么，赵、钱、孙三位先生的年龄分别为（　　）。

A.30 岁，15 岁，22 岁　　B.36 岁，18 岁，13 岁

C.28 岁，14 岁，25 岁　　D.14 岁，7 岁，46 岁

[解析]根据“钱先生比孙先生小7岁”，只有第一项符合。

7.两根同样长的蜡烛，点完粗蜡烛要3小时，点完细蜡烛要1小时。同时点燃两根蜡烛，一段时间后同时熄灭，发现粗蜡烛的长度是细蜡烛的3倍。问两根蜡烛燃烧了多长时间？（　　）

A. 30分钟　　B. 35分钟　　C. 40分钟　　D. 45分钟

【解析】假设两根蜡烛原长都为1，那么熄灭的时候粗蜡烛的长度应该低于1，故而细蜡烛的长度应该低于$\frac{1}{3}$，燃烧的长度要高于$\frac{2}{3}$，那么燃烧的时间也应该高于$\frac{2}{3}$小时，结合选项，选择D。

本题还可以使用其他方法，但直接代入是最直接的方法，不需要经过复杂的思考过程。另外，B、C选项代入时，不需要重新计算，直接在A选项的基础上，余数分别加1和2即可。

1. 某工人的步行速度为每小时5公里，如果他先步行上班路程的$\frac{1}{10}$，然后乘上速度为每小时25公里的汽车，最后再步行1公里刚好到厂，那么他可以比完全步行上班早二小时到厂。问他的上班路程有多少公里？(　　)

A. 15　　　　　B. 16　　　　　C. 14　　　　　D. 12

2. 成大妈早上8点从A镇乘坐时速16千米的乡村客车出发去C镇赶集，途径B镇在亲戚家吃饭，歇息了1个小时，接着从B镇换成时速40千米的公路客车去C镇，下午3点到达C镇，已知A、C两镇相距180千米，问A、B两镇距离？（　　）

A. 40　　　　　B. 50　　　　　C. 70　　　　　D. 80

3. 一个**五位数**，左边**三位数**是右边**两位数**的5倍，如果把右边的**两位数**移到前面，则所得新的**五位数**要比原来的**五位数**的2倍还多75，则原**五位数**是多少？（　　）

A. 12525　　　　　B. 13527　　　　　C. 17535　　　　　D. 22545

4. 小明和小华计算甲、乙两个不同自然数的积（这两个自然数都比1大）。小明把较大的数字的**个位数**错看成了一个更大的数字，其计算结果为144，小华却把乘号看成了加号，其计算结果为28。问两个数的差为（　　）。

A. 16　　　　　B. 12　　　　　C. 8　　　　　D. 4

**提示:**如果已知两个数的和与差，那么这两个数应该分别为和与差相加的一半、相减的一半。这个结论非常重要，方便我们口算很多题目。数学形式为：$\begin{cases}a+b=M\\a-b=N\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=\frac{M+N}{2}\\b=\frac{M-N}{2}\end{cases}$

5. 孙儿孙女的**平均年龄**是10岁，孙儿年龄的平方减去孙女年龄的平方所得的数值，正好是爷爷出生年份的后两位，爷爷生于上个世纪40年代。问孙儿、孙女的年龄差是多少岁？

A.2　　B.4　　C.6　　D.8

6. 小李的弟弟比小李小 2 岁，小王的哥哥比小王大 2 岁、比小李大 5 岁。1994 年，小李的弟弟和小王的年龄之和为 15。问 2014 年小李与小王的年龄分别为多少岁?

A.25,32　　B.27,30　　C.30,27　　D.32,25

7. 一支有 100 多人的旅行团乘坐汽车，如果每辆车都乘坐 29 人，结果剩下 4 人；如果增加一辆车，则所有游客正好平均分到各辆车上，问此时每辆车乘坐了多少人？

A.23　　B.24　　C.26　　D.28

8. 某汽车厂商生产甲、乙、丙三种车型，其中乙型产量的3倍与丙型产量的6倍之和等于甲型产量的4倍，甲型产量与乙型产量的2倍之和等于丙型产量7倍。则甲、乙、丙三型产量之比为(　　)

A. 5∶4∶3　　B. 4∶3∶2　　C. 4∶2∶1　　D. 3∶2∶1

9. 某市出租汽车的车费计算方式如下：路程在 3 公里以内(含 3 公里)为 8.00 元；达到 3 公里后，每增加 1 公里收 1.40 元；达到 8 公里以后，每增加 1 公里收 2.10 元，增加不足 1 公里按四舍五入计算。某乘客乘坐该种出租车交了 44.4 元车费，则此乘客乘该出租车行驶的路程为多少公里?

A.22 公里　　B.24 公里　　C.26 公里　　D.29 公里

10.　　两同学需托运行李。托运收费标准为10公斤以下6元/公斤，超出10公斤部分每公斤收费标准略低一些。已知甲乙两人托运费分别为109.5元、78元，甲的行李比乙重了50%。那么，超出10公斤部分每公斤收费标准比10公斤以内的低了多少元?（　　）

A.1.5元　　B.2.5元　　C.3.5元　　D.4.5元

11.　　某零件加工厂按照工人完成的合格零件和不合格零件支付工资，工人每做出一个合格零件能得到工资10元，每做一个不合格零件将被扣除5元，已知某人一天共做了12个零件，得工资90元，那么他在这一天做了多少个不合格零件？（　　）

A.2　　B.3　　C.4　　D.6

12.　　某人搬运2000只易碎物品，每只运费为3角。如果损坏一只不但不给运费，还要赔偿5角，结果共得560元，问他损坏了多少只?（　　）

A.80只　　B.70只　　C.60只　　D.50只

13.　　三个运动员跨台阶，台阶总数在100-150之间，第一位运动员每次跨3级台阶，最后一步还剩2级台阶。第二位运动员每次跨4级，最后一步还剩3级台阶。第三位运动员每次跨5级台阶，最后一步还剩4级台阶。问这些台阶总共有（　　）级?

A.119　　B.121　　C.129　　D.131

**课后精选真题：**

1. 一个三位数，各位上的数的和是 15，百位上的数与个位上的数的差是 5,如颠倒百位与个位上的数的位置，则所成的新数是原数的 3 倍少 39。求这个三位数？(　　)

A.196　　　B.148　　　C.267　　　D.429

2. 从若干围棋子中拿走 15 枚白棋子后，黑子与白子的个数之比为 2：1；再拿走 45 枚黑棋子后，黑子与白子的个数比为 1:5，则开始时黑棋子、白棋子各有（　　）枚。

A.50,45　　　B.50,40　　　C.60,45　　　D.60,50

3. 某个三位数的数值是其各位数字之和的 23 倍。这个三位数为（　　）。

A.702　　B.306　　C.207　　D.203

4. 一个小于 80 的自然数与 3 的和是 5 的倍数，与 3 的差是 6 的倍数，这个自然数最大是多少？（　　）

A.32　　　B.47　　　C.57　　　D.72

5. 两个数各加 2 的比为 3:2，两个数各减 4 的比为 2:1，问这两个数各是多少?（　　）

A.16，10　　B.14，12　　C.16，8　　D.18，10

6. 一个袋子里放着各种颜色的小球，其中红色球占 1/4，后来又往袋子里放了 10 个红球，这时红球占总数的 2/3，问原来袋子里有多少个球?（　　）

A.8　　B.12　　C.16　　D.20

7. 三个连续自然数的积是其和的 21 倍，则这三个数中最小的是(　　)。

A.3　　B.4　　C.7　　D.12

8. 经技术改进，A、B 两城间列车的运行速度由 150 千米／时提升到 250 千米／时，行车时间因此缩短了 48 分钟，则 A、B 两城间的距离为（　　）。

A. 291千米　　　B.300千米　　　C.310千米　　　D.320千米

9. 今年小花年龄的 3 倍与小红年龄的 5 倍相等。10 年后小花的年龄的 4 倍与小红年龄的 5 倍相等，则小花今年的年龄是多少岁？（　　）

A.12　　　B.6　　　C.8　　　D.10

10.　甲乙两个小朋友各有一袋糖，每袋糖不到 20 粒。如果甲给乙一定数量的糖后，甲的糖就是乙的糖粒数的 2 倍；如果乙给甲同样数量的糖后，甲的糖就是乙的糖粒数的 3 倍。那么甲乙两个小朋友共有多少粒糖?（　　）

A.12　　B.24　　C.36　　D.48

11.　　甲、乙各有钱若干元，甲拿出 1/3 给乙后，乙再拿出总数的 1/5 给甲，这时他们各有 160 元。问甲、乙原来各有多少钱？(　　)

A.120　200　　B.150　170　　C.180　140　　D.210　110

12.　　某中介服务机构根据服务项目所涉及的金额按一定比例收取服务费，具体标准如下：1 万元(含)以下收取 50 元；1 万元以上，5 万元(含)以下的部分收取 3%；5 万元以上，10 万元(含)以下的部分收取 2%。(如，某一服务项目所涉及金额为 5 万元时，应收取服务费 1250 元)现有一服务项目所涉及金额为 10 万元，那么，所收取的服务费应为多少元?(　　)

A.2250 元　　B.2500 元　　C.2750 元　　D.3000 元

13.　　韩信故乡淮安民间流传着一则故事—“韩信点兵”。有一次，韩信率 1500 名将士与楚军交战，战后检点人数，他命将士 3 人一排，结果多出 2 名；命将士 5 人一排，结果多出 3 名；命将士 7 人一排，结果又多出 2 名，用兵如神的韩信立刻知道尚有将士人数。已知尚有将士人数是下列四个数字中的一个，则该数字是（　　）。

A.868　　B.998　　C.1073　　D.1298

14.　　赵先生 34 岁，钱女士 30 岁。一天他们碰上了赵先生的三个邻居，钱女士问起了他们的年龄，赵先生说:他们三人的年龄各不相同，三人的年龄之积是 2450，三人的年龄之和是我俩年龄之和。问三个邻居中年龄最大的是多少岁?（　　）

A.42　　B.45　　C.49　　D.50

# 精选真题练习参考答案

1. 【答案】C。

2. 【答案】B。

3. 【答案】C。

【解析】直接将选项代入，很明显:702≠23×9，306≠23×9，207=23×9，203≠23×5。所以选择C。

[注释]典型的多位数问题。判断的时候可以使用尾数法以提高效率。

4. 【答案】C。

【解析】

5. 【答案】A。

【解析】直接代入，发现A满足条件。

[注释]典型的和差倍比问题。

6. 【答案】A。

【解析】直接代入，发现A满足条件。

[注释]典型的和差倍比问题。

7. 【答案】C。

【解析】这三个自然数的积是 21 的倍数，肯定包括因子 3 和 7，明显排除 A、B。将 C 代入，如果这三个数是 7、8、9，那么 7×8×9÷(7+8+9)=21，满足条件，选择 C。

8. 【答案】B。

【解析】直接代入验证即可，但根据题干速度和选项数字，我们应该优先选择最简单的数字，即 B 选项的 300 千米，300÷150=2（小时），300÷250=1.2（小时），两者相差 0.8 小时，正好是 48 分钟，选择 B。

9. 【答案】D。

【解析】解法一：列方程，设小花为X，小红为Y。那么3X=5Y；4（X+10）=5（Y+10），解得小花年龄为10。

解法二，直接代入法，唯有D项合适。

10. 【答案】B。

【解析】假设甲、乙原有糖数分别为x，y粒，他们交换的糖的数量为n粒，则:

$$\begin{cases} x-n=(y+n)\times 2 \\ x+n=(y-n)\times 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=17n \\ y=7n \end{cases}$$

因此x是17的倍数，又x不到20，那么x=17，故而n=1，y=7，所以x+y=24(粒)。

11. 【答案】C。

12. 【答案】A。

【解析】0～1 万元的部分，收取 50 元；1～5 万元的部分，收取 40000×3%=1200 元；5～10 万元的部分，收取 50000×2%=1000 元，a+b+c=50+1200+1000=2250 元，故选 A。

13. 【答案】C。

【解析】直接代入：只有 1073 满足“除以 3 余 2，除以 5 余 3，除以 7 余 2”，选择 C。

14.　　【答案】C。

【解析】假设这三人年龄从大至小分别为 x，y、z 岁，则:

$$\begin{cases} x+y+z=34+30=64 \\ x\times y\times z=2450 \end{cases}$$

明显 2450 不是 3 的倍数，所以年龄当中不应该有 3 的倍数存在，排除 A、B。如果 C 正确，即最大年龄 x=49，那么我们有(注意 y>x):

$$\begin{cases} y+z=64-49=15 \\ y\times z=2450\div 49=50 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} y=10 \\ z=5 \end{cases}$$

明显满足条件，所以选择 C。

[注释]运用代入法进行求解时，只要有一个答案完全满足条件，那么就肯定是正确答案而不再需要去代入其他的选项。事实上，如果将 D 代入，将得到两个相等的根:y=z=7，与条件相悖。

# 第 03 讲　赋值与比例假设法

**设特殊值为1**

1.某农场有36台收割机，要收割完所有的麦子需要14天时间。现收割了7天后增加4台收割机，并通过技术改造使每台机器的效率提升5%。问收割完所有的麦子还需要几天？

A.3　　　　　B.4　　　　　C.5　　　　　D.6

【解析】设原来每台收割机每天的工作效率为1，则工作总量为36×14×1，剩下的36×7×1由36+4=40台收割机完成，改造后每台收割机效率为1.05，故剩下需要的时间为（36×7×1)÷(40×1.05）=6天，故答案选D。

**设特殊值为100**

2.某水果店销售一批水果，按原价出售，利润率为25%。后来按原价的九折销售，结果每天的销量比降价前增加了1.5倍。则打折后每天销售这批水果的利润比打折前增加了（　　）。

A.15%　　　　B.20%　　　　C.25%　　　　D.30%

【解析】设水果每斤成本为100，原价为125，利润为125-100=25。对于一斤水果打折后每斤价格变为125×0.9=112.5，销量变为2.5，利润为2.5×(112.5-100)=2.5×12.5=25×1.25。因此利润增加了 25%。

**设特殊值为份数**

3.受原材料涨价影响，某产品的总成本比之前上涨了$\frac{1}{15}$，而原材料成本在总成本中的比重提高了 2.5 个百分点。问原材料的价格上涨了多少？

A.$\frac{1}{12}$　　　　B. $\frac{1}{11}$　　　　C. $\frac{1}{10}$　　　　D.$\frac{1}{9}$

【解析】设产品的原总成本为 15，则现在总成本为 15×(1+$\frac{1}{15}$)=16，原材料涨幅为 1。设涨价前原材料占总成本比重为 x，则原材料价格为 15x。涨价后占总成本的比重为(x+2.5%)，原材料价格为 16×(x+ 2.5%)。因此，16×（x+2.5%)=15x+1，解得 x=0.6，涨价前原材料价格为 15×0.6=9。因此原材料价格上涨$\frac{1}{9}$，选 D。

**设特殊值为公倍数**

4.A、B两条流水线每小时均能装配1辆汽车。A流水线每装配3辆汽车要用1小时维护，B流水线每装配4辆汽车要用1.5小时维护。问两条流水线同时开始工作，装配200辆汽车需用多少个小时？

A.134　　　　B.135　　　　C.136　　　　D.137

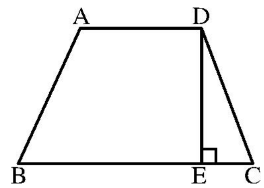
【解析】根据题意，A流水线4小时装配3辆汽车，B流水线5.5小时装配4辆汽车，因此每44小时（44是4和5.5的最小公倍数，是为了便于分析和计算）A流水线装配汽车33辆，B

流水线装配32 辆，（32+33）×3=195辆，耗时44×3=132小时。余下五辆车分给两个流水线，最快需要3小时完成。因此共需要132+3=135小时。

**应用原则：**当题目中没有涉及某个具体量的大小，并且这个具体量的大小并不影响最终结果的时候，运用赋值思想，将这个量设为某一个利于计算的数值，从而简化计算——特值法。

**应用范围：**一般在工程、混合配比、加权平均、流水行船、往返行程、几何、经济利润、和差倍比（和倍问题，差倍问题，和差问题，比例问题）等问题中使用赋值思想。

1. 如图所示，梯形 ABCD, AD//BC, DE⊥BC,现在假设 AD,BC 的长度都减少 10％，DE 的长度增加 10%，则新梯形的面积与原梯形的面积相比，会怎样变化？（　　）




A.不变　　　B.减少1%　　　C.增加10%　　　D.减少10%

2. 某单位组建兴趣小组，每人选择一项参加，羽毛球组人数是乒乓球组人数的 2 倍，足球组人数是篮球组人数的 3 倍，乒乓球组人数的 4 倍与其他 3 个组的人数的和相等。则羽毛球组人数等于（　　）。

A.足球组人数与篮球组人数之和　　B.乒乓球组人数与足球组人数之和

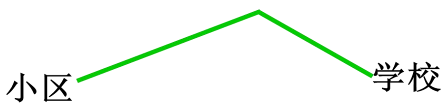
C.足球组人数的 1.5 倍　　　　　D.篮球组人数的 3 倍

3. 现需要购买 A、B 两种调料加工成一种新调料，两种调料的单价分别为 20 元/千克、30 元/千克。假设购买这两种调料所花费的钱数额一样，则由 A、B 两种调料混合后的新调料每千克的成本是（　　）。

A. 23 元　　　B. 24 元　　　C. 25 元　　　D. 26 元

4. 某大学生从学校骑车至某小区，学校与该小区仅相隔一个山坡。从学校直接上坡，再下坡即到达该小区。已知下坡速度是上坡速度的 2.5 倍，下坡所花时间是上坡时间的一半。若返回时的上下坡速度仍保持不变，则从小区返回学校花费时间与学校到小区花费时间之比为（　　）。

A.11：10　　　B.10：11　　　C.12：11　　　D.11：12



使用赋值法时，大家最大的困惑是什么样的量可以随便设，什么样的量不行？总的来说，当某类量的大小在题目中无关紧要时，便可以随便设为一个方便计算的数字，这样的量一般需要满足两个条件：

1.这类量在题目中没有提及具体数字大小；

2.这类量也不能通过其他有具体数字大小的量计算得到。

譬如在行程问题中，我想假设某人的速度为1，那么就必须满足两个条件：

1.题目中没有提及任何速度的具体数字大小；

2.题目中也没有同时提及路程和时间的具体数字大小，因为知道了这两类量，就可以计算出速度的具体大小。

当题目中只有路程或者只有时间有具体大小时，我们假设速度为1或者其他数字，就不会影响结果。同理，在经济利润问题中，如果题目中只有单价的具体数字大小，没有件数和总价的具体数字大小，那么我们可以假设件数为1，或者假设总价为1，但不能同时做这两件事情。

5.甲、乙、丙、丁四人共同投资一个项目，已知甲的投资额比乙、丙二人的投资额之和高20%，丙的投资额是丁的60%，总投资额比项目的资金需求高$\frac{1}{3}$。后来丁因故临时撤资，剩下三人的投资额之和比项目的资金需求低$\frac{1}{12}$，则乙的投资额是项目资金需求的（　　）。

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{5}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{1}{3}$

## 比例假设法

从赋值法可知，当题目中某个未知量不影响最终结果时，为了方便计算，我们可以将其设为某个特殊的值，从而简化计算。

然而在有些题目中，虽然我们非常希望假设其中某个量为一个方便计算的数值，但随意假设可能会跟题干当中的某些已知数字矛盾，这时我们就可以使用“比例假设法”进行扩充变形。

**扩充变形：**如果假设的数字与已知条件矛盾，我们可以通过矛盾双方之间的倍数关系，按比例放大或缩小即可。

1.某市针对虚假促销的专项检查中，发现某商场将一套茶具加价4成后再打8折出售，**实际售价比原价还高24元**。问这套茶具的原价是多少元？（　　）

A.100　　B.150　　C.200　　D.250

| | 原价 | 加价后 | 打折后 | 差价 |
|---|---|---|---|---|
| 假设量 | | | | |
| 实际量 | | | | |

2. 某有色金属公司四种主要有色金属总产量的$\frac{1}{5}$为铝，$\frac{1}{3}$为铜，镍的产量是铜和铝产量之和的$\frac{1}{4}$，而**铅的产量比铝多 600 吨**。问该公司镍的产量为多少吨？（　　）

A.600　　B.800　　C.1000　　D.1200

| | 总量 | 铝 | 铜 | 镍 | 铅 | 铅-铝 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 假设量 | | | | | | |
| 实际量 | | | | | | |

3. 某技校安排本届所有毕业生分别去甲、乙、丙 3 个不同的工厂实习。去甲厂实习的毕业生占毕业生总数的 32%，**去乙厂实习的毕业生比去甲厂实习的少 6 人**，且占毕业生总数的 24%。问去丙厂实习的人数比去甲厂实习的人数（　　）。

A.少 9 人　　B.多 9 人　　C.少 6 人　　D.多 6 人

| | 总数 | 甲 | 乙 | 丙 | 甲-乙 | 丙-甲 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 假设量 | | | | | | |
| 实际量 | | | | | | |

【注意】“赋值法”的关键是题目当中某一类量的大小时不确定的，从头到尾不涉及这一类量的大小。而“比例假设法”的背景是不一样的，“某一类量”的大小其实是确定的，但这一类量在题干中只出现了 1 次。譬如本题中的人数，题干当中出现了“少 6 人”这样一个条件，说明各种人数实际上并不是可以随意假定的。在使用“比例假设法”的时候，有两个关键点一定要注意：（1）像“少 6 人”这样的条件，不能用于推导假设量，只能用于和假设量进行倍数比较；（2）像“人数”这样的条件，题干中只能出现一次，譬如这里的“少 6 人”，一旦出现了两个“人数”的条件，“比例假设法”是不能使用的。

4. 甲、乙和丙共同投资一个项目并约定按投资额分配收益。甲初期投资额占初期总投资额的$\frac{1}{3}$，乙的初期投资额是丙的 2 倍。最终**甲获得的收益比丙多 2 万元**。则乙应得的收益为多少万元？（　　）

A.6　　B.7　　C.8　　D.9

| | 总投资 | 甲 | 乙 | 丙 | 甲-丙 |
|---|---|---|---|---|---|
| 假设量 | | | | | |
| 实际量 | | | | | |

本题假设了投资额，但题干中有涉及投资额的具体数字，即：甲-丙=2 万元，所以这个 2 万元肯定会跟我们的假设量有矛盾冲突。所以我们在计算的时候，这个“2 万元”只能用来最后确定“假设值与实际值的比例或者倍数”，绝对不能用来做其他的计算，希望大家牢记这个原则。

**课后真题练习：**

1. 某影院有四个演播大厅，A厅可容纳人数占影院可容纳总人数的$\frac{4}{13}$， B厅的容量是A厅的$\frac{5}{6}$。C厅可容纳人数是A厅、B厅总和的$\frac{4}{11}$，D厅比C厅可多容纳40人。按照规定，一部影片最多只能在三个演播厅同时上映。这个影院每次最多有多少观众能同时观看一部影片？

A. 1080　　B. 1200　　C. 1240　　D. 1560

2. 王处长从东北捎来一袋苹果分给甲乙两个科室的人员，每人可分得6个，如果只分给甲科，每人可分得10个。问如果只分给乙科，每人可分得多少个？(　　)

A.8个　　B.12个　　C.15个　　D.16个

3. 小红去买过冬的蔬菜，她带的钱可以买10斤萝卜或50斤白菜，如果小红买了6斤萝卜，剩下的钱全用来买白菜，可以买几斤白菜?(　　)

A. 12斤　B. 15斤　C. 20斤　　D. 24斤

4. 电影票10元一张,降价后观众增加一倍,收入增加1/5,则一张票降价多少元?(　　)

A. 8　　B. 6　　C. 4　　D. 2

5. 两家售货亭以同样的价格出售商品。一星期后，甲售货亭把售价降低了20%，再过一星期又提高了40%;乙售货亭只在两星期后提价20%。这时两家售货亭的售价相比？(　　)

A.甲比乙低　　B.甲比乙高　　C.甲、乙相同　　D.无法比较

6. 一个长方体的长和宽分别增加20％、50％，而高减少50％，那么其体积如何变化?(　　)

A. 增加10％　　B. 减少10％　　C.增长20％　　D. 减少20％

7. 某班学生中，3/4的女生和3/5的男生是共青团员，若女生团员人数是男生团员人数的5/6，则该班女生人数与男生人数的比为(　　)。

A. 2：3　　B. 3：2　　C.4：5　　D. 5：6

8. 某服装店老板去采购一批商品，其所带的钱如果只买某种进口上衣可买120件，如果只买某种普通上衣则可买180件。现在知道，最后该老板买的进口上衣和普通上衣的数量相同，问他最多可以各买多少件？（　　）

A. 70件　　B. 72件　　C. 74件　　D. 75件

9. 某商店以每件6元的进价买回一批商品，售价为每件8.4元，当卖了这批商品的$\frac{3}{4}$时，不仅收回了购买这批商品所付的款项，而且还获得利润90元，这批商品有（　　）。

A. 500 件　　　B. 400 件　　　C. 300 件　　　D. 600 件

10.　甲、乙两辆清洁车执行东、西城间的公路清扫任务。甲车单独清扫需要6小时，乙车单独清扫需要9小时，两车同时从东、西城相向开出，相遇时甲车比乙车多清扫15千米。问东、西两城相距多少千米？（　　）

A.60 千米　　B.75 千米　　C.90 千米　　D.135 千米

11.　一个产品生产线分为a、b、 c 三段，每个人每小时分别完成10、5、6件， 现在总人数为71人，要使得完成的件数最大，71人的安排分别是（　）。

A. 14:28:29　　B. 15:31:25　　C. 16:32:23　　D. 17:33:21

# 精选真题练习参考答案

1. 【答案】C。

【解析】不妨设四个演播大厅总人数有 39 份，则 A 厅有 12 份， B 厅有 10 份， C 厅有 8 份，因此 D 厅有 9 份，比 C 厅多 1 份，所以 1 份为 40 人，最多的三厅应该为 A、B、D 厅，共 31 份，其总人数为 31×40=1240（人），答案选 C。

2. 【答案】C。

【解析】10和6的公倍数是30。代入后可以得知甲乙两科室共有5个人，进而求出乙科室有2个人，那么乙科室分得15个。

3. 【答案】C。

【解析】假设小红带了 100 元，易知萝卜 10/斤，白菜 2 元/斤。小红带了 6 斤萝卜花了 60 元，剩下 40 元可以买 20 斤白菜。

4. 【答案】C。

【解析】假设原有观众 100 人，那么原来的收入为 $10\times100=1000$ 元，降价后观众增加一倍变为 200 人，收入增长$\frac{1}{5}$变为 $1000+1000\times\frac{1}{5}=1200$ 元，那么票价为 $1200\div200=6$ 元，即降价 4 元。

5. 【答案】A。

【解析】取100作中间数求解。

6. 【答案】B。

【解析】假设这个长方体的长、宽、高都为 10，体积为 1000。变化之后长、宽、高分别为 12、15、5，体积为 900，较之前减少了 10%。

7. 【答案】A。

【解析】因为女生团员人数是男生团员人数的$\frac{5}{6}$，可设女生、男生团员人数分别为 15 人，18 人（注意到前面$\frac{3}{4}$和$\frac{3}{5}$两个分数，加入因子 3 以避免分数），由题干第一句话易知女生总人数为 $15\div\frac{3}{4}=20$ 人，男生总人数为 $18\div\frac{3}{5}=30$ 人，那么女生与男生人数之比为 2:3。

8. 【答案】B。

【解析】假设带了 360 元，那么进口上衣和普通上衣价格分别是 3 元、2 元，那么可以各 买 360÷（3+2）=72（件）。

9. 【答案】C

【解析】假设这批商品有 100 件，成本为 6×100=600（元）。只卖出了 75 件时，收入为 8.4×75=630（元），获利 630-600=30（元）。实际获利 90 元，所以实际值是假设值的 3 倍，这批商品共有 a300 个，选择 C。

10. 【答案】B

【解析】假设两城相距 18 千米，甲速度为 18÷6=3（千米/时），乙速度为 18÷9=2（千米/时），相遇时间为 18÷（2+3）=3.6（小时），两车分别走了 10.8 千米、7.2 千米，相差

3.6 千米。而实际甲车比乙车多清扫了 15 千米，是假设值的 $15\div3.6=\frac{25}{6}$倍，说明两城相距 $18\times\frac{25}{6}$ （千米），选择 B。

11.　　【答案】B

【解析】如果要完成30件产品，三个生产线恰好分别需要3、6、5个人，这样总数是14人。而实际人数为71人，我们知道70是14的5倍，所以如果安排70个人，三个生产线应该分别安排3、6、5的5倍，即15、30、25个人，剩下1个人安排在哪里都无所谓了，选择B。

# 第 04 讲　其他基本解题方法

## 一、十字交叉法(比例划线法)

“十字交叉法”实际上是一种简化方程的形式，凡是符合下图左边方程的形式，都可以用右边的“十字交叉”的形式来简化：

Aa+Bb=（A+B）r$\rightarrow\frac{A}{B}=\frac{r-b}{a-r}\rightarrow\rightarrow\frac{A}{B}=\frac{r-b}{a-r}$

以上问题称为“加权平均问题”，一般不用列方程而采用“十字交叉法”来求解。

**“十字交叉法”适用范围：一个集合为总体，只有 2 个不同的分量，第 1 个分量取值为 a，另一部分取值为 b,平均值为 c。求取值为 a 的个体与取值为 b 的个体的比例。**

1.重量分别为 A 与 B 的溶液，其浓度分别为 a 与 b，混合后浓度为 r。

2.数量分别为 A 与 B 的人口，分别增长 a 与 b，总体增长率为 r。

3.A 个男生平均分为 a,B 个女生平均分为 b，总体平均分为 r。

如果不知道什么时候可以使用十字交叉法，并且不知道得到的比例是哪两个量的比例，这时，可以列出上面形式的式子来判断。当然这是平时就要积累的，如果考场之上无法判断的话，就不建议使用这种方法，直接列方程更快更准确。

**十字相乘法使用时要注意几点：**

**第一点：用来解决两者之间的比例关系问题。**

**第二点：得出的比例关系是基期的比例关系。**

**第三点：总均值放中央，对角线上，大数减小数，结果放对角线上。**

1.　要将浓度分别为 20%和 5%的 A、B 两种食盐水混合配成浓度为 15%的食盐水 900 克。问 5%的食盐水需要多少克？

A.250　　B.285　　C.300　　D.325

【解析】利用十字交叉法求出两种溶液的质量比。


因此两种溶液的质量比为 10:5=2:1，900 克混合后的食盐水中，5%的食盐水占到 900×$\frac{1}{2+1}$=300 克，选 C。

2. 某单位共有职工 72 人，年底考核平均分数为 85 分，根据考核分数，90 分以上的职工评为优秀职工，已知优秀职工的平均分数为 92 分，其他职工的平均分数是 80 分，问优秀职工的人数是多少？（　　）

A. 12　　　　B. 24　　　　C. 30　　　　D. 42

**核心提示**

当我们使用“十字交叉法”的时候，有一个技巧非常重要，那就是当我们计算得到比例之后，应该如何算得最后的实际数值。

譬如上例中，我们得到比例为 5：7，然后就需要跟原题中的实际数字去对照：如果原题中告诉我们优秀员工是 15 个，正好是 5 的 3 倍，那么就把 5：7 这个比例的分子、分母同时乘以 3，得到 15：21；如果原题中告诉我们其他员工是 56 个，正好是 7 的 8 倍，那么就把 5：7 这个比例的分子、分母同时乘以 8，得到 40：56；而事实上，原题给的是这两者之和为 72，5：7 这个比例分子、分母之和为 12，是 72 的六分之一，所以应该把 5：7 这个比例的分子、分母同时乘以 6，得到 30：42，这两个数字分别就是这两部分的实际数字。

3. 某单位为全体员工进行体检，平均体重是 57.5 公斤。其中，男员工的平均体重是 62.5 公斤，女员工的平均体重是 55.5 公斤。则该单位的男、女员工人数比为（　　）。

A. 2：5　　　　B. 2：7　　　　C. 7：2　　　　D. 5：2

4. 某高校艺术学院分音乐系和美术系两个系别，已知学院男生人数占总人数的 30%，且音乐系男女生人数之比为 1：3，美术系男女生人数之比为 2：3，问音乐系和美术系的总人数之比为多少？（　　）

A. 5：2　　　　B. 5：1　　　　C. 3：1　　　　D. 2：1

“十字交叉法”本质上是一种“加权平均问题”。两部分各自的增长率对最后的合成增长率都有影响，各自影响的大小，由其本身值的大小所决定。

如：一个地区的城市人口和农村人口之比为 3:7，城市人口增长 5%，农村人口增长 6%，那么整个地区的人口增长率应该在 5%和 6%之间。城市人口占 3 份，农村人口占 7 份，那么城市、农村对最终合成增长率的影响力之比为 3:7，即这个合成增长率与 5%、6%的距离之比应该是 7:3，即 5.7%。这样的结果是比较容易口算得出的，但要注意这个比例对应的是增长之前的比例，而不是增长之后的比例。

5. 甲、乙两个相同的杯子中分别装满了浓度为 20%和 30%的两种溶液。将甲杯中倒出一半溶液，用乙杯中的溶液将甲杯加满混合，然后再将已经加满的甲杯中的溶液全部倒入一杯清水中且未溢出，溶液浓度变为 20%。若该溶液密度与水完全相同，问原甲杯中溶液的质量是这杯清水质量的多少倍？（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

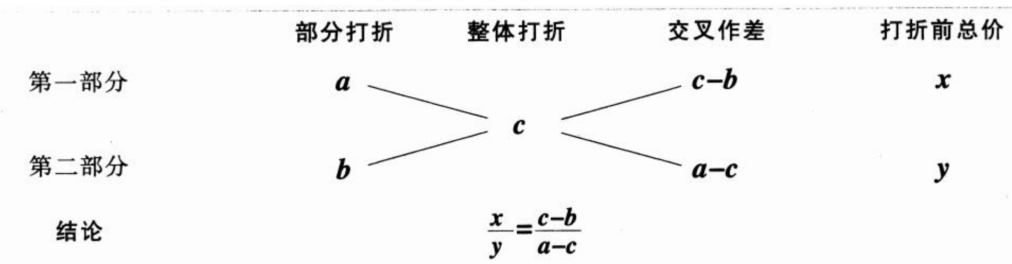
6. 面包房购买一包售价为 15 元/千克的白糖，取其中的一部分加水溶解形成浓度为 20%的糖水 12 千克，然后将剩余的白糖全部加入后溶解，糖水浓度变为 25%，问购买白糖花了多少元钱？（　　）

A. 45　　B. 48　　C. 36　　D. 42

整体打折的问题，在理清售价、原定价和打折情况三者之间的关系后，可直接套用打折的定义。但当遇到商品分批次打折，且打折力度不同的情况时，若仍套用定义，则需要大量的数据计算。此时可以利用计算加权平均数的十字交叉法快速求解。

示例：一批商品，一部分打 a 折，剩余的部分打 b 折，总体相对于原价打 c 折。

解读：应用十字交叉法，把部分打折与整体打折对应好，可求出打折力度不同的物品之间的数量比。




在很多题目中，由于打折前两种物品的价格相同，所以“两种打折力度不同的物品总价比”就是它的数量比。

7. 某市制定了峰谷分时电价方案，峰时电价为原电价的 110%，谷时电价为原电价的八折，小静家六月用电 400 度，其中峰时用电 210 度，谷时用电 190 度，实行峰谷分时电价调整方案后小静家用电成本为调整前的多少？（　　）

A. 95.75%　　B. 87.25%　　C. 90.5%　　D. 85.5%

8. 学校体育部采购一批足球和篮球，足球和篮球的定价分别为每个 80 元和 100 元。由于购买数量较多，商店分别给予足球 25%、篮球 20%的折扣，结果共少付了 22%。问购买的足球与篮球的数量之比是多少？

A. 4：5　　B. 5：6　　C. 6：5　　D. 5：4

9. 甲、乙两种商品原来单价和为 100 元，因市场变化，甲商品降价 10%，乙商品提价 40%，调价后两商品单价和比原来的单价和提高 20%，则乙商品提价后多少元？

A. 40　　B. 60　　C. 36　　D. 84

10. 2023 年，某省第二产业增长 8.92%。其中，工业增长 9.70%，建筑业增长 3.39%。请问 2022 年该省建筑业占第二产业的比重为多少？(　　)

A. 11.7%　　B. 12.4%　　C. 13.1%　　D. 14.3%

11. 2023 年，某省第二产业增长 8.92%。其中，工业增长 9.70%，建筑业增长 3.39%。请问 2023 年该省建筑业占第二产业的比重为多少？(　　)

A. 11.7%　　B. 12.4%　　C. 13.1%　　D. 14.3%

## 二、极端思维法

当试题当中出现了**“至多”“至少”“最多”“最少”“ 最大”“最小” “最快”“最慢”“最高”“最低”**等字样时，我们通常需要考虑“极限思维法”。这种方法需要分析题意，构造出满足题意要求的最极端的情形。

12. 现有 21 本故事书要分给 5 个人阅读，如果每个人得到的数量均不相同，那么得到故事书数量最多的人至少可以得到（ ）本。

A. 5 B. 7 C. 9 D. 11

| 第 1 名 | 第 2 名 | 第 3 名 | 第 4 名 | 第 5 名 |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

13. 有 100 人参加五项活动，参加人数最多的活动的人数不超过参加人数最少活动人数的两倍，问参加人数最少的活动最少有多少人参加？（ ）

A. 10 B. 11 C. 12 D. 13

| 第 1 项 | 第 2 项 | 第 3 项 | 第 4 项 | 第 5 项 |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

14. 某班级共有 50 名学生，某次考试后发现，所考的三门课程得分优秀率分别为 10%、20%和 16%，三门课程不及格率分别为 12%、18%和 10%，问如果在该班任选一名学生，至少有一门课程得分优秀且至少有一门课程不及格的最大概率为多少？（ ）

A. 20% B. 16% C. 46% D. 40%

完全构造：

| 人数比例 | 10% | 10% | 8% | 8% | 4% |
|---|---|---|---|---|---|
| 优秀科目 | 一 | 二 | 三 | 三 | 一 |
| 不及格科目 | 二 | 三 | 一 | 二 | 一 |

15. 一个班里有 30 名学生，有 12 人会跳拉丁舞，有 8 人会跳肚皮舞，有 10 人会跳芭蕾舞。问至多有几人会跳两种舞蹈？（　　）

A. 12 人　　B. 14 人　　C. 15 人　　D. 16 人

16. 阅览室有 100 本杂志。小赵借阅过其中 75 本，小王借阅过 70 本，小刘借阅过 60 本，则三人共同借阅过的杂志最少有（　　）本。

A. 5　　B. 10　　C. 15　　D. 30

**题目：**总数为 M 个，其中满足条件 A 的有 a 个，满足条件 B 的有 b 个，满足条件 C 的有 c 个，

**问：**同时满足 A，B，C 这三个条件的数目至少有多少？

**答案：把这三个数字加起来，减去总数的 2 倍即可：a+b+c-2×M**

**如果题目设定四个条件，就把这四个数字加起来，减去总数的 3 倍。依此类推。**

【例 1】车库停了 100 辆车，有 75 张是大众，有 70 张是黑色的，有 60 辆是自动档。请问黑色大众自动档汽车最少有几辆？

【例 2】一个班 45 个同学，英语优秀的有 38 个，数学优秀的有 32 个，语文优秀的有 29 个，物理优秀的 42 个，同时四门课程都优秀的至少有几个？

## 三、调和平均数

在数学做题中，我们一般会接触到“算术平均数”a=$\frac{a_1+a_2}{2}$，偶尔也会碰到“几何平均数”a=$\sqrt{a_1a_2}$。还有一类平均数在数学运算当中出现率很高，就是“调和平均数”$\overline{a}$=$\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2}$。

**题型一：等距离平均速度**

17. 某人开车从 A 镇前往 B 镇，在前一半路程中，以每小时 60 千米的速度前进；而在后一半的路程中，以每小时 40 千米的速度前进。则此人从 A 镇到达 B 镇的平均速度是每小时多少公里？（　　）

A. 50　　B. 55　　C. 48　　D. 45

**等距离平均速度核心公式：** （其中$v_1$和$v_2$分别代表前后两次速度）。

18. 一辆汽车从 A 地到 B 地的速度为每小时 30 千米，返回时速度为每小时 20 千米，则它的平均速度为多少千米/时？（ ）

A.24 千米 / 时 B.24.5 千米 / 时 C.25 千米 / 时 D.25.5 千米/时

19. 一人骑车从 M 地到 N 地速度为每小时 10 千米，到达 N 地后，立刻接到通知返回 M 地。为了使其往返于两地之间的平均速度为每小时 12 千米，则其骑车返回 M 地的速度应为多少？（ ）

A. 14 千米 / 小时 B. 15 千米 / 小时 C. 16 千米 / 小时 D. 18 千米/小时

20. 从甲地到乙地 111 千米，其中有$\frac{1}{4}$是平路，$\frac{1}{2}$是上坡路，$\frac{1}{4}$下坡路。假定一辆车在平路的速度是 20 千米/小时，上坡的速度是 15 千米/小时，下坡的速度是 30 千米/小时。则该车由甲地到乙地往返一趟的平均速度是多少（ ）千米/小时？

A.19 B.20 C.21 D.22

在来回上下坡问题当中，去的上坡一定是回的下坡，去的下坡一定是回的上坡。

因此，来回一趟走的上坡与下坡距离一定是对半平分。

21. 小明从 A 地出发，需要先走一段平路，再爬一段上坡路才能到达 B 地，到达 B 地后，他停留一小时后按原路返回 A 地。小明走平地的速度为 $5\frac{1}{3}$千米/小时，上坡速度为 4 千米/小时，下坡速度为 8 千米/小时。小明从出发到返回共用 7 小时，则 A、B 两地的距离为（ ）千米。

A.32 B.12 C.15 D.16

**题型二：等价钱平均价格**

22. 商店购进甲、乙两种不同的糖所用的钱数相等，已知甲种糖每千克 10 元，乙种糖每千克 15 元。如果把这两种糖混在一起做成什锦糖，那么这种什锦糖每千克的成本是多少元？（ ）

A.10 B.11 C.12 D.13

**等价钱平均价格核心公式：** （其中$P_1$和$P_2$分别代表之前两种商品的价格）

23. 现需要购买 A、B 两种调料加工成一种新调料，两种调料的单价分别为 20 元/千克、30 元/千克。假设购买这两种调料所花费的钱数额一样，则由 A、B 两种调料混合后的新调料每千克的成本是（ ）。

A. 23 元　　B. 24 元　　C. 25 元　　D. 26 元

**题型三：等溶质增减溶剂**

24. 某盐溶液的浓度为 20%，加入水后，溶液的浓度变为 15%，如果再加入同样多的水，则溶液的浓度变为（ ）。

A.13%　　B.12.5%　　C.12%　　D.10%

**等溶质增减溶剂核心公式：** （其中$r_1$、$r_2$、$r_3$分别代表连续变化的浓度）。

25. 一个容器盛有一定量盐水，第一次加入适量水后，容器内盐水浓度为 3%，第二次再加入同样多水后，容器内盐水浓度为 2%，则第三次加入同样多的水后盐水浓度为（ ）。

A.0.5%　　B.1%　　C.1.2%　　D.1.5%

26. 浓度为 15%的盐水若干克，加入一些水后浓度变为 10%，再加入同样多的水后，浓度为多少？（ ）

A.9%　　B.7.5%　　C.6%　　D.4.5%

**题型四：等时间间隔发车**

27. 某人沿电车线路匀速行走，每 30 分钟有一辆电车从后面追上，每 20 分钟有一辆电车迎面开来，假设两个起点站的发车间隔是相同的，求这个发车间隔（ ）。

A.23 分钟　　B.24 分钟　　C.25 分钟　　D.26 分钟

**发车时间间隔：**

**题型五：前后轮消耗模型**

28. 有一辆自行车，前轮和后轮都是新的，并且可以互换，轮胎在前轮位置可以行驶 6000 千米，在后轮位置可以行驶 4000 千米，问使用两个新轮胎，这辆自行车最多可以行驶多远？（　　）

A. 4250　　B. 4800　　C. 4000　　D. 4750

**前后轮消耗模型核心公式：**

**课后真题：**

1. 在环保知识竞赛中，男选手的平均得分为 80 分，女选手的平均得分为 65 分，全部选手的平均得分为 72 分。已知全部选手人数在 35 到 50 之间，则全部选手人数为（　　）。

A. 48　　B. 45　　C. 43　　D. 40

2. 某浇水装置可根据天气阴晴调节浇水量，晴天浇水量为阴雨天的 2.5 倍。灌满该装置的水箱后，在连续晴天的情况下可为植物自动浇水 18 天。小李 6 月 1 日 00：00 灌满水箱后，7 月 1 日 00：00 正好用完。问 6 月有多少个阴雨天？（　　）

A. 10　　B. 16　　C. 18　　D. 20

3. 烧杯中装了 100 克浓度为 10%的盐水。每次向该烧杯中加入不超过 14 克浓度为 50%的盐水，问最少加多少次之后，烧杯中的盐水浓度能达到 25%？（假设烧杯中盐水不会溢出）（　　）

A. 6　　B. 5　　C. 4　　D. 3

4. 某公交线路从起点到终点共 25 个站点，每天早上 6 点分别从起点站和终点站同时开出首班车，晚上 10 点开出末班车，每班车发车时间间隔 10 分钟。假设每辆车从一个站点行驶到下一个站点所需时间均为 5 分钟，则该线路至少需要配备（　　）辆车。

A. 24　　B. 13　　C. 12　　D. 26

5. 某次知识竞赛的决赛有 3 人参加，规则为 12 道题每题由 1 人以抢答方式答题，正确得 10 分，错误扣 8 分，如果最后所有人得分都是正分，且回答问题最多的人是得分最少的人，那么前两名之间的分差最多为多少分？（　　）

A. 8　　B. 12　　C. 20　　D. 40

6. 黑母鸡下 1 个蛋歇 2 天，白母鸡下一个蛋歇 1 天，两只鸡共下 10 个蛋最少需要多少天？（　　）

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13

7. 公司举办的内部业务知识竞赛有若干人参加，所有参赛者获得的名次之和为 300，且所有人没有并列名次。其中，销售部门、售后服务部门和技术部门参赛者获得的名次平均数分别为 11.3、10.4 和 9.2，问其他部门获得的名次最高为多少？（　　）

A. 16　　B. 18　　C. 20　　D. 21

8. 一个 20 人的班级举行百分制测验，平均分为 79 分，所有人得分都是整数且任意两人得分不同。班级前 5 名的平均分正好是 16 到 20 名平均分的 2 倍。则班级第 6 名和第 15 名之间的分差最大为多少分？（　　）

A. 34　　　　　B. 37　　　C. 40　　　　D. 43

9. 在一次抽奖活动中，要把 18 个奖品分成数量不等的 4 份各自放进不同的抽奖箱。则一个抽奖箱最多可以放（　　）个奖品。

A. 6　　　　　B. 8　　　　　C. 12　　　　D. 15

10.　　假设 7 个相异正整数的平均数是 14，中位数是 18，则此 7 个正整数中最大数最大是多少？（　　）

A. 58　　　　　B. 44　　　C. 35　　　　D. 26

11.　　某连锁企业在 10 个城市共有 100 家专卖店，每个城市的专卖店数量都不同。如果专卖店数量排名第 5 多的城市有 12 家专卖店，那么专卖店数量排名最后的城市，最多有几家专卖店？（　　）

A. 2　　　　　B. 3　　　　　C. 4　　　　D. 5

12.　　植树节到来之际，120 人参加义务植树活动，共分成人数不等且每组不少于 10 人的六个小组，每人只能参加一个小组，则参加人数第二多的组最多有（　　）人。

A. 34　　　　　B. 35　　　C. 36　　　　D. 37

13.　　甲、乙两厂生产同一种汽车，甲厂每月产量保持不变，乙厂每月产量翻番。已知第 1 个月甲、乙两厂共生产 88 辆汽车，第 2 个月甲、乙两厂共生产 96 辆汽车，那么乙厂每月产量第一次超过甲厂是在第（　　）个月。

A. 4　　　　B. 5　　　　C. 6　　　　D. 7

14.　　餐厅需要使用 9 升食用油，现在库房里库存有 15 桶 5 升装的，3 桶 2 升装的，8 桶 1 升装的。问库房有多少种发货方式，能保证正好发出餐厅需要的 9 升食用油？（　　）

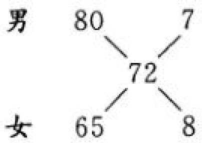
A. 4　　　　B. 5　　　　C. 6　　　　D. 7

15.　　某人要从 A 市经 B 市到 C 市，从 A 市到 B 市的列车从早上 8 点起每 30 分钟一班，全程行驶一小时；从 B 市到 C 市的列车从早上 9 点起每 40 分钟一班，全程行驶 1 小时 30 分钟；在 B 市火车站换乘需用时 15 分钟。如果他想在出发当天中午 12 点前到达 C 市，问他有几种不同的乘车方式？（　　）

A. 3　　　　B. 2　　　　C. 5　　　　D. 4

## 参考答案及解析

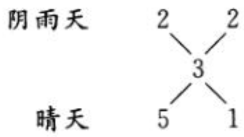
1. B [简析]运用十字交叉法：




男女比例为 7：8，说明总人数是 15 的倍数，只有 45 满足。

2. D

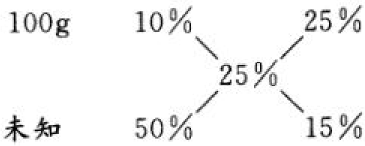
[简析]设阴雨天浇水量为 2，晴天浇水量为 5，则水总量为：5×18=90，那么 6 月平均每天浇水量为：90÷30=3，运用十字交叉法：




阴雨天：晴天=2：1=20：10，即 6 月有 20 个阴雨天。

3. B

[简析]运用“十字交叉法”：




$\frac{25\%}{15\%}=\frac{5}{3}=\frac{100g}{60g}$,

至少要加 60 克，每次最多 14 克，则至少 5 次。

4. A

[简析]从起点到终点共 25 个站点，24 段路，一辆车行驶完全程所需时间为 24×5=120 分钟，说明早上 6 点之后 120 分钟的时候，对面的第一趟车才能到达，在这之前，必须发出 120÷10=12 辆车，所以至少需要 12×2 =24 辆车。

5. D

[简析]题目要求“前两名之间的分差”尽可能大，那么我们构造第 1 名尽可能多，第 2 名尽可能少。第 1 名最多能回答 5 道题目（因为第 1 名不是回答问题最多的人），那么最多全对得 50 分，第 3 名回答问题最多，那只能是回答了 6 道题目，而第 2 名只回答了 1 道题目，又要求分数为正，所以这 1 题应该是答对的，得 10 分。所以前两名分差为 50-10=40（分），已经是选项当中最大的数字，直接选这个。

6. B

[简析]既然问“最少”需要多少天，那么我们构造两只鸡第一天就生蛋的情形：

| 天数 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 黑母鸡 | ○ | | | ○ | | | ○ | | | ○ | | | ○ |
| 白母鸡 | ○ | | ○ | | ○ | | ○ | | ○ | | ○ | | |

显然，第 11 天的时候一共下蛋 10 个。

7. C

[简析]设总共有 n 人参加竞赛，名次从 1 到 n，相加为$\frac{n（n+1）}{2}$=300，解得 n=24，总共有 24 人。销售部门的名次平均数为 11.3，但其名次总和肯定是整数，所以人数一定是 10 的倍数。同理售后部门、技术部门的人数必须是 5 的倍数，否则其名次总和就不是整数。根据总人数 24 这个条件，这三个部分的人数只能分别为 10、5、5 人，其他部门还有 4 人，其名次总和为：300-10×11.3-5×10.4-5×9.2 =89。要使其他部门之中最高名次者尽可能的高，剩下 3 人名次要尽可能低，也就是最后三名，所以答案为：89-22-23-24=20。

8. D

[简析]要想第 6 名和第 15 名之间的分差尽可能的大，那么前 5 名和最后 5 名之间的差距也要尽可能的大，并且前 5 名分数尽量挨着，给第 6 名留出上升的空间，后 5 名分数也尽量挨着，给第 15 名留出下降的空间。前 5 名最多能是 100、99、98、97、96，平均分为 98，那么后 5 名平均分为 49，5 个数就应该是 47、48、49、50、51。于是第 6 名最多可以上升到 95 分，第 15 名最多可以下降到 52 分，相差 43 分。

9. C

[简析]既然要求一个箱子放的奖品个数足够多，那么其他的就尽可能少，其余三个箱子分别放 1、2、3 个，这样第四个箱子就可以放 12 个。

10. C

[简析]假设最大数字为 x，它要尽可能的大，其余的数字就要尽可能的小，构造如下：

| 第 1 个 | 第 2 个 | 第 3 个 | 第 4 个 | 第 5 个 | 第 6 个 | 第 7 个 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 20 | 19 | 18 | 3 | 2 | 1 |

x+20+19+18+3+2+1=14×7=98，得到：x=35。

11. C

[简析]设排名最后的城市专卖店数量为 x，若要 x 最大，则其他要最小，列表如下：

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | 15 | 14 | 13 | 12 | x+4 | x+3 | x+2 | x+1 | x |

进而可以得到：16+15+14+13+12+（x+4）+（x+3）+（x+2）+（x+1）+x = 100，解得 x=4。

12. C

[简析]我们假设第二多的组有 n 个人，要想这个组的人尽可能多，那么其他五个组的人就要尽可能少，第一多的组至少有（n+1）人，最后四组最少分别有 10、11、12、13 人，所以：n+1+n+13+12+11+10=120，解得 n=36.5，所以最多是 36 人。

13. B

[简析]第 2 个月比第 1 个月多生产 96-88=8（辆），进而可得乙第 1 个月的产量为 8，甲为 80，那么乙各月产量分别为 8、16、32、64、128，所以第 5 个月时，乙超过甲。

14. C

[简析]四个选项数字都很小，我们直接枚举，如下表所示：

| 5 升（共 15 桶） | 2 升（共 3 桶） | 1 升（共 8 桶） |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 0 |
| 1 | 1 | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 0 | 4 |
| 0 | 3 | 3 |
| 0 | 2 | 5 |
| 0 | 1 | 7 |

15. D

[简析]四个选项都是非常小的数字，我们枚举每种乘车方式即可：

1.早上 8：00 列车 A→B，9：00 到达，9：40 列车 B→C，11：10 到达；

2.早上 8：00 列车 A→B，9：00 到达，10：20 列车 B→C，11：50 到达；

3.早上 8：30 列车 A→B，9：30 到达，10：20 列车 B→C，11：50 到达；

4.早上 9：00 列车 A→B，10：00 到达，10：20 列车 B→C，11：50 到达。

# 第 05 讲　方程及经济利润问题

## 课前导学

1.某商品2月份价格较1月份上涨了20%，由于政府调控政策的出台，3月份该商品价格又降了20%，问该商品3月份的价格与1月份的价格相比（　　）。

A.涨高了　　B.持平　　C.降低了　　D.不能确定

【解析】设该产品1月份的价格为1，则2月份的价格为1×(1+20%)=1.2，三月份的价格为1.2×(1- 20%)=0.96＜1，与1月份相比降低了。

2.两超市分别用3000元购进草莓。甲超市将草莓按大小分类包装销售，其中大草莓400千克，以高于进价1倍的价格销售，剩下的小草莓以高于进价10%的价格销售。乙超市按甲超市大、小两种草莓售价的平均值定价直接销售。两超市将草莓全部售完，其中甲超市获利2100元(不 计其他成本），则乙超市获利多少元？

A.1950 元　　B.1800 元　　C.1650元　　D.1500元

【解析】设草莓的进价为x，则甲、乙超市均进草莓（3000÷x)千克，根据题意可知，甲超市大草莓售价2x、小草莓售价1.1x，乙超市所有草莓均售价(2x+1.1x)÷2=1.55x。则乙的盈利额为（1.55x-x)×(3000÷x)=0.55×3000=1650，选择 C。

3.某超市用2500元购进一批鸡蛋，销售过程中损耗鸡蛋10千克。已知超市每千克鸡蛋的售价比进价高1元，全部售完后共赚440元，则共购进这批鸡蛋（　　）千克。

A.460　　B.500　　C.590　　D.610

【解析】设购进x千克鸡蛋，则进价为$\frac{2500}{x}$，售价为$\frac{2500}{x}+1$。实际销售x-10千克，总销售额为（$\frac{2500}{x}$+1）×（x-10）；成本为2500元。

根据利润=售价-成本，（$\frac{2500}{x}$+1）×（x-10）-2500=440，解得x=500。

4.一批玩具，比进价高200%销售，一段时间后，六一儿童节促销，玩具按定价6折销售，打折后这批玩具价格比进价高百分之（　　）。

A.20　　B.40　　C.60　　D.80

【解析】设进价为100，则打折前的售价为100×(1+200%)=300，打折后的售价为300×0.6=180，比进价高（180-100)÷100=80%。

5.某消防器材销售中心购进一批进价为4000元/台的消防泵，卖出的起始原价为 5500元/台，折价销售后的利润率为则此消防泵约按（　　）折销售。

A.6　　B.7　　C.7.6　　D.8

【解析】折价后的售价为4000×(1+5%) =4200元，折扣率为$\frac{4200}{5500}$=76%，选C。

## 一、方程问题

**(一)基本思路：**

1.A经过一系列变化，变成B　　$A\pm\times\div a=B$

2.A,B经过变化，就一样了　　$A\pm\times\div a=B\pm\times\div b$

3.A比B多b%　　A=B(1+b%)　　$B=\frac{A}{1+b\%}$

4.A比B多b　　A-b=B　　A=B+b　　A-B=b

**（二）应用范围**

数学运算的大部分题型，都可以使用“方程法”来解答。其中，“盈亏问题”、“鸡兔同笼问题”和“和差倍比问题”一般都应该使用“方程法”；除此之外，“经济利润问题”、“浓度问题”、“年龄问题”、“行程问题”、“等差数列”、“平均数问题”、“容斥问题”、“工程问题”等题型当中的相当一部分试题也需要利用方程来求解。

**（三）解方程**

解方程的过程就是对方程进行化简、做等价变形的过程。一般情况下，方程的个数应该等于未知数的个数。当方程中存在多个未知数时，尽量消去无关未知数，保留相关的未知数；当方程中有小数或分数时，应首先考虑两边乘以同一个数将其化为整数。

1.用白铁皮做罐头盒，每张铁皮可制16个盒身或43个盒底，一个盒身与两个盒底配成一套罐头盒。现有150张白铁皮，则应用（　）张来制盒身，余下的制盒底，可以正好全部制成整套的罐头盒。

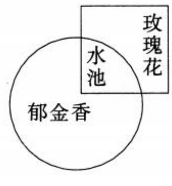
A.86　　B.78　　C.64　　D.54

**1.设未知数的技巧**

设未知数是列方程的第一步，未知数设定的优化程度决定了解方程的速度。为了便于列方程和解方程，在某些情况下，**不一定要直接设所求量**。

（1）利用题干中的比例关系设未知数，如两个量的比例为m：n，则可以设这两个量分别为mx和nx，这样设未知数，可以减少未知数的个数，并且规避分数的出现，进而减少计算量。

2.右图为某公园花展的规划图。其中，正方形面积的$\frac{3}{4}$是玫瑰花展区，圆形面积的$\frac{6}{7}$是郁金香花展区，且郁金香花展区比玫瑰花展区多占地450平方米。那么，水池占地（　）平方米。




A.100　　B.150　　C.225　　D.300

3. 某单位原拥有中级及以上职称的职工占职工总数的 62.5%。现又有 2 名职工评上中级职称，之后该单位拥有中级及以上职称的人数占总人数的$\frac{7}{11}$，则该单位原来有多少名职称在中级以下的职工？（　　）

A. 68　　B. 66　　C. 64　　D. 60

4. 某抗洪指挥部的所有人员中，有$\frac{2}{3}$的人在前线指挥抢险。由于汛情紧急，又增派 6 人前往，此时在前线指挥抢险的人数占总人数的 75%。如该抗洪指挥部需要保留至少 10%的人员在应急指挥中心，那么最多还能再派多少人去前线？（　　）

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11

（2）当题干中有两个或更多个未知数时，根据各未知数之间的关系，采用取中间量的方法，减少未知数的个数。由于一次方程中未知数的个数通常与方程的个数相等。因此减少未知数的个数在一定程度上减少了计算量。

5. 假设空气质量可按良好、轻度污染和重度污染三类划分。一环境监测单位在某段时间对 63 个城市的空气质量进行了监测，结果表明：空气质量良好城市数是重度污染城市数的 3 倍还多 3 个，轻度污染城市数是重度污染城市数的 2 倍。那么，空气质量良好的城市个数是（　）。

A. 33　　B. 31　　C. 23　　D. 27

6. 甲、乙、丙、丁共有 48 本书，若在他们原有基础上做如下变动：甲增加 3 本，乙减少 3 本，丙增加到原来的 3 倍，丁减少为原来的$\frac{1}{3}$，此时四人的书一样多，则原有书本最多的人有（　　）本书。

A. 18　　B. 24　　C. 27　　D. 36

**2.解方程组的技巧**

方程组由多个方程组成，并含有多个未知数，在解方程组时要将其转化为一元一次方程。解方程组通常采用**代入消元法**求出单个未知数的解。在不需要求出方程组所有未知数的解时，可以把方程视为一个整体进行加减运算，即整体代换法。

1. 甲买 3 支签字笔，7 支圆珠笔，1 支铅笔，共花 32 元钱；乙买同样的 4 支签字笔，10 支圆珠笔，1 支铅笔，共花 43 元，如同样的签字笔、圆珠笔、铅笔各买 1 支，共用多少钱？

A. 21　　B. 11　　C. 10　　D. 17

2. 小张、小李、小王三人到商场购买办公用品，小张购买 1 个计算器，3 个订书机，7 包打印纸共需要 316 元，小李购买 1 个计算器，4 个订书机，10 包打印纸共需要 362 元。小王购买了 1 个计算器，1 个订书机，1 包打印纸共需要？（　　）

A. 224 元　　B. 242 元　　C. 124 元　　D. 142 元

3. 甲、乙、丙练习投篮，一共投了 150 次，共有 64 次没投进。已知甲和乙一共投进 48 次，乙和丙一共投进 69 次，乙投进多少次？（　　）

A. 28　　B. 31　　C. 30　　D. 33

4. 某校初一年级共有三个班，甲班与乙班人数之和为 98，甲班与丙班人数之和为 106，乙班与丙班人数之和为 108，则乙班人数为多少人？（　　）

A. 48　　B. 50　　C. 58　　D. 60

5. 某火车站有一、二、三号三个售票窗口，某天一号以外的窗口卖出了 746 张票，二号以外的窗口卖出了 726 张票，三号以外的窗口卖出了 700 张票。问当天该站共售车票多少张？（　　）

A. 1086　　B. 988　　C. 986　　D. 980

## 二、利润问题

解决利润问题的关键是找出**进价、成本、定价、售价、折扣、单件收入、总收入、单件利润、总利润、利润率**之间的关系。**一般情况下成本就是进价（此时不考虑运费等其他因素）。**

| 概念 | 含义 | 示例 | 相关公式 |
| --- | --- | --- | --- |
| 进价 | 商品买进的价格 | 商家以每件100元买入某商品 | |
| 定价 | 商家根据进价定出的商品出售价格 | 商家决定以每件150元卖出某商品 | |
| 售价 | 商品实际的出售价格 | 商家实际以每件120元卖出某商品 | |
| 折扣 | 售价与定价之比 | 120÷150=0.8，即该商品打了八折 | 折扣=$\frac{售价}{定价}$ |
| 收入 | 所有商品出售所得（包含成本） | | 收入=售价×数量 |
| 利润 | 售价（收入）与成本的差 | 每件商品商家赚了120-100=20元 | 利润=售价-成本<br>利润=收入-成本 |
| 总利润 | 所有商品利润之和 | | 总利润=单件利润×商品数量 |
| 利润率 | 利润占成本的百分比 | 利润率为　20÷100=20% | 利润率=$\frac{利润}{成本}$ |

**（一）基础利润问题**

利润问题主要研究售价、成本、利润（或利润率）这三量之间的关系。

**1.成本、利润率、打折**

售价指商品卖出的价格；成本在一般情况下就是进价；利润是售价与成本的差；利润率就是利润与成本的比值；打折是售价与原价（定价）的比值。

1.两超市分别用3000元购进草莓。甲超市将草莓按大小分类包装销售，其中大草莓400千克，以高于进价1倍的价格销售，剩下的小草莓以高于进价10%的价格销售。乙超市按甲超市大、小两种草莓售价的平均值定价直接销售。两超市将草莓全部售完，其中甲超市获利2100元（不计其他成本），则乙超市获利多少元？

A.1950 元　　B.1800 元　　C.1650 元　　D.1500 元

2.某超市用2500元购进一批鸡蛋，销售过程中损耗鸡蛋10千克。已知超市每千克鸡蛋的售价比进价高1元，全部售完后共赚440元，则共购进这批鸡蛋(　　)千克。

A.460　　B.500　　C.590　　D.610

3. 某超市以每公斤 7 元的价格购入水果 200 公斤，并以每公斤 10 元的价格售出 150 公斤，剩下可出售的水果按 8 折甩卖一空。经计算，销售本批水果共获利 300 元。问这批水果的折损率是多少？

A. 12. 5%　　B. 15%　　C. 7. 5%　　D. 10%

4.　服装店买进一批童装，按每套获利 50%定价卖出这批童装的 80%后，按定价的八折将剩下的童装全部卖出，总利润比预期减少了 390 元。问服装店买进这批童装花了多少元？

A. 5500　　B. 6000　　C. 6500　　D. 7000

5. 某公司推出的新产品预计每天销售 5 万件，每件定价为 40 元，利润为产品定价的 30%。公司为了打开市场推出九折促销活动，并且以每天 10 万元的费用为产品和促销活动做广告宣传。问销量至少要达到预计销量的多少倍以上，每天的盈利才能超过促销活动之前？

A. 1. 75　　B. 2. 25　　C. 2. 75　　D. 3. 25

**2.销售数量和售价反向变化问题**

价格上涨，销量就会减少；价格下跌，销量就会增加，即销售数量与价格反向变化。在行测考试中，研究这类规律的问题，一般有两种考查方式:

(1)通过价格、销量反向变化前后的利润对比，求成本、售价等；

(2)求总利润最高时的售价或总利润的最大值。**(一般使用代入法)**

6.　将进货单价为 90 元的某商品按 100 元出售时，能卖出 500 个，已知这种商品如果每个涨价 1 元，其销售量就会减少 10 个，为了获得最大利润，售价应定为（　　）

A. 110 元　　B. 120 元　　C. 130 元　　D. 150 元

7. 张先生向商店订购某种商品 80 件，每件定价 100 元。张先生向商店经理说：“如果你肯减价，每减 1 元，我就多订购 4 件。“商店经理算了一下，他如果减价 5% ，那么由于张先生多订购，仍可获得与原来一样的利润。这种商品的成本是多少？( )

A.75 元 B.80 元 C.70 元 D.85 元

**(二)利润问题拓展**

**1.促销形式的比较**

促销的手段有很多种，除了打折，也有送返券的形式。多种促销方式有时可以叠加，有时不能叠加，需要视题干条件而定。

示例：一件商品原价 1000 元，打 8 折再让利 50 元，两种促销方式可以叠加，则只需付出（1000×0.8-50）元即可买到该商品。

示例：商场有两种活动，活动一：全场打八折；活动二 ：满 200 元减 50 元。只能选其中一种活动，如果一件商品 300 元，则至少需要多少钱能买到该商品？

解读：两种方式不能叠加，则需分别算出参加两种活动后该商品的最终售价，再加以比较，选择较低者。参加活动一，应付 300×0.8=240 元；参加活动二，应付 300-50=250 元。则应选择参加活动一。

当多种促销方式不叠加时，至于哪种促销形式更划算，可以把它们都统一成折扣率来比较打折力度。如果是同一商品，则只需要比较单价。

8. 某商场在进行“满百省”活动，满 100 省 10，满 200 省 30，满 300 省 50。大于 400 的消费只能折算为等同于几个 100、200、300 的加和。已知一位顾客买某款衬衫 1 件支付了 175 元，那么买 3 件这样的衬衫最少需要（ ）

A.445 元 B.475 元 C.505 元 D.515 元

9. 某商场举行周年让利活动，单件商品满 300 减 180 元，满 200 减 100 元，满 100 减 40 元；若不参加活动则打 5.5 折。小王买了价值 360 元、220 元、150 元的商品各一件，最少需要多少元钱？

A.360 B.382.5 C.401.5 D.410

## 小结：

命题人出题，为了增加题目的难度及思考时间的长度，题目就要“绕圈”。

要解决这个难题，需要我们具备“**由此及彼**”的能力，就是由命题人给出的这个条件迅速无意识的想到这个条件的另一面。

示例：题目如果给平均值，一定要求和；题目给和，要通过平均值求解。

某工厂的一个生产小组，当每个工人都在岗位工作，9 小时可以完成一项生产任务。如果交换工人甲和乙的岗位，其他人不变，可提前 1 小时完成任务

电费使用费用为：标准以内 0.5 元/度，超标后按照 80%收费。

动车过桥要 35 秒，轿车过桥时间是动车的 3 倍。

教室里总人数是 45 人，其中女生 28 人。

投篮 150 次，其中 66 次没投进

我国有 14.17 亿人，其中男性占 52.18%。

**课后真题练习：**

1. 共有 20 个玩具交给小王手工制作完成。规定，制作的玩具每合格一个得 5 元，不合格一个扣 2 元，未完成的不得也不扣。最后小王共收到 56 元，那么他制作的玩具中，不合格的共有(　　)个。

A. 2　　B. 3　　C. 5　　D. 7

2. 某高校有 A、B 两个食堂，开学第一天 A 食堂就餐人数为 8000，但其中 20%在第二天流失到 B 食堂就餐，同时，第一天在 B 食堂就餐者有 30%于第二天流失到 A 食堂，如果第二天两食堂就餐人数相同，则第一天 B 食堂人数为（　　）。

A. 10000　　B. 11000　　C. 12000　　D. 13000

3. 某鞋业公司的旅游鞋加工车间要完成一出口订单，如果每天加工 50 双，要比原计划晚 3 天完成；如果每天加工 60 双，要比原计划提前 2 天完成。这一订单共需加工（　　）双旅游鞋。

A. 1200　　B. 1300　　C. 1400　　D. 1500

4. 有一本畅销书，今年每册书的成本比去年增加了 10%，因此每册书的利润下降了 20%，但是今年的销售比去年增加了 70%，则今年销售该畅销书的总利润比去年增加了(　　)

A. 36%　　B. 25%　　C. 20%　　D. 15%

5. 王明把 3000 元钱存入银行，年利率 2.1%，每年取出后再次存入，这样三年后一共能取出多少元钱?（　　）

A. 3189　　B. 3193　　C. 3245　　D. 3500

6. 三个单位共有 180 人，甲、乙两个单位人数之和比丙单位多 20 人，甲单位比乙单位少 2 人，则甲单位的人数为（　　）。

A. 48 人　　B. 49 人　　C. 50 人　　D. 51 人

7. 一名工人加工一批产品，他每加工出一件正品，得报酬 0.75 元，每加工出一 件次品，罚款 1.50 元。这天他加工的正品是次品的 7 倍，得报酬 11.25 元。那么他这天加工出多少件次品？（　　）

A. 13　　B. 7　　C. 3　　D. 1

8. 一个图书馆里有科技书和文学书两种类型，首先拿走 25 本科技书，剩下的文学书占剩下书的$\frac{4}{7}$，又拿走 42 本文学书，剩下的科技书占所剩书的$\frac{5}{7}$，问：最开始文学书占总共书的几分 之几？（　　）

A. $\frac{3}{7}$　　B. $\frac{6}{13}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{2}{7}$

9. 甲、乙两个乡村阅览室，甲阅览室科技类书籍数量的$\frac{1}{5}$相当于乙阅览室该类书籍的$\frac{1}{4}$，甲阅览室文化类书籍数量的$\frac{2}{3}$相当于乙阅览室该类书籍的$\frac{1}{6}$，甲阅览室科技类和文化类书籍的总量比乙阅览室两类书籍的总量多 1000 本，甲阅览室科技类书籍和文化类书籍的比例为 20:1，问甲阅览 室有多少本科技类书籍？（　　）

A. 15000　　B. 16000　　C. 18000　　D. 20000

10. 某月刊每期定价 5 元。某单位一部分人订半年，另一部分人订全年，共需订 费 480 元；如果订半年的改订全年，订全年的改订半年，那么共需 420 元。共有多少人订了这份期刊？（　　）

A.25　　B.20　　C.15　　D.10

11. 三位专家为 10 幅作品投票，每位专家分别都投出了 5 票，并且每幅作品都有专家投票。如果三位专家都投票的作品列为 A 等，两位专家投票的列为 B 等，仅有一位专家投票的作品列 为 C 等，则下列说法正确的是（　　）。

A. A 等和 B 等共 6 幅　　B. B 等和 C 等共 7 幅

C. A 等最多有 5 幅　　D. A 等比 C 等少 5 幅

12. 某公司的工资制度规定：8 小时工作时间内工资为 20 元/小时，加班费为 30 元/小时，每月加班时间超过 20 小时，超过部分为 40 元/小时，某职工 3 月份 22 个工作日全勤，税前工资 为 4800 元，问其 3 月份工作时间共多少小时？（　　）

A. 213　　B. 219　　C. 228　　D. 240

13. 甲、乙两种商品成本共 2000 元，商品甲按 50%的利润定价，商品乙按 40%的利润定价，后来打折销售，两种商品都按定价的 80%出售，结果仍可得利润 300 元，甲种商品的成本是（　　）。

A. 700元　　B. 750元　　C. 800元　　D. 850元

14. 某停车场按以下办法收取停车费：每 4 小时收 5 元，不足 4 小时按 5 元收， 每晚超过零时加收 5 元并且每天上午 8 点重新开始计时。某天下午 15 时小王将车停入该停车场，取车时缴纳停车费 65 元，小王停车时间 t 的范围为（　　）。

A. 41<t≤44小时　　B. 44<t≤48小时　　C. 32<t≤36小时　　D. 37<t≤41小时

15. 某市规定，出租车合乘部分的车费向每位乘客收取显示费用的 60%，燃 油附加费由合乘客人平摊。现有从同一地方出发的三位客人合乘，分别在 D、E、F 点下车，显示的费用分别 为 10 元、20 元、40 元，那么在这样的合乘中，司机的营利比正常（三位客人是一起的，只是分别在上述三个地方下车）多（　　）。

A. 2元　　　　B. 10元　　　　C. 12元　　　　D. 15元

16.　　某商店花10000进了一批商品，按期望获得相当于进价25%的利润来定价。结果只销售了商品总量的30%。为尽快完成资金周转，商店决定打折销售，这样卖完全部商品后，亏本1000元。问商店是按定价打几折销售的？（　　）

A. 九折　　　　B. 七五折　　　　C. 六折　　　　D. 四八折

## 精选真题练习参考答案

1. 【答案】A。

【解析】设合格的有x个，不合格的有y个。则5x-2y=56，x、y<20。

5x=56+2y，5x的尾数为0或5，56+2y是偶数，其尾数只能为0。结合选项可知y=2或7。

当y=2时，x=12，共完成x+y=12+2=14个，符合题意；

当y=7时，x=14 ，x+y>20，不符题意，排除。

2. 【答案】C。

【解析】假设第一天B食堂就餐人数为x人，则:

8000-8000×20%+30%x=(8000+x)÷2，解得:x=12000。

3. 【答案】D。

【解析】设这一订单共需加工旅游鞋x双，则: $\frac{x}{50}-\frac{x}{60}=5\rightarrow x=1500$

4. 【答案】A。

【解析】采用特值法，将利润具体化。

设去年每本书的利润为1，总销量为1，则总利润为1×1=1。今年的利润为1-20%=0.8，总销量为1+70%=1.7，总利润为0.8×1.7=1.36，则今年的总利润比去年多了36%。

5. 【答案】B。

【解析】根据公式，一年后，本息和=本金×(1+利率)=3000×(1+2.1%)；

此时存入的本金为3000×(1+2.1%)，两年后的本息和=3000×(1+2.1%)×(1+2.1%)；

同理，三年后的本息后=3000×(1+2.1%)×(1+2.1%)×(1+2.1%)≈3193元。

6. 【答案】B。

【解析】假设三个单位分别x、y、z人，则 $\begin{cases}x+y+z=180\\x+y-z=20\quad\Rightarrow x=49\\x+2=y\end{cases}$

7. 【答案】C。

【解析】假设次品为x件，则0.75×7x-1.5×x=11.25，两边同时乘以4，得到15x=45，x=3。

8. 【答案】B。

【解析】【简析】我们假设拿走25本科技书后，还剩下7x本书，其中文学书有4x本，科技书有3x本。根据条件有：3x÷(7x-42) $=\frac{5}{7}$, x=15（本），说明拿掉25本科技书后文学书、科技书分别有60、45本，那么最开始文学书、科技书分别有60、70本，文学书占比为 $60\div130=\frac{6}{13}$ 。

9. 【答案】D。

【解析】假设甲阅览室有 20x 本科技类书籍、x 本文化类书籍。根据条件可知：乙阅览室的 科技类书籍为 16x，乙阅览室的文化类书籍为 4x。则

(20x+x)-(16x+4x)=1000, x=1000, 20x=20000 本。

10. 【答案】D。

【解析】假设 x 人订半年，y 人订全年，直接把下面两个方程相加：

$$\begin{cases}5\times6\times x+5\times12\times y=480\\5\times12\times x+5\times6\times y=420\end{cases}\Rightarrow 90x+90y=900\Rightarrow x+y=10$$

11. 【答案】D。

【解析】设 A 等为 x 件，B 等为 y 件，C 等为 z 件，则：

$$\begin{cases}x+y+z=10 & (1)\\3x+2y+z=3\times5=15 & (2)\end{cases}\quad (1)\times2-(2)\Rightarrow -x+z=5$$

12. 【答案】A。

【解析】设 3 月份的加班时间为 x 小时，则 22×8×20+20×30+40×（x—20）=4800，x=37，总时间为 22×8+37=213（小时），答案选 A。

13. 【答案】B。

【解析】设甲种商品的成本为 x 元，则乙种商品的成本为（2000-x）元，可 得：x×（1+50％）×80％+（2000-x）×（1+40％）×80％=2000+300，解得 x=750。故选 B 项。

14. 【答案】D。

【解析】15 点至第二天 8 点，时长为 17 小时，按 4 小时计一共应该是 5 段，所以总费用 为 5×5+5=30（元）；第二天 8 点至第三天 8 点，时长为 24 小时，总共是 6 段，总费用为 6×5+5=35（元），即两 段时间的总费用为 65 元，总时长为 41 小时，因此满足题意的时间为 37<t≤41 小时，答案选 D。

15. 【答案】B。

【解析】显示 10 元时，收取 3 人共 10×60％×3=18（元）；显示 20 元时，收取 2 人共（20-10）×60％×2=12（元）；显示 30 元时，收取 1 人共 40-20=20（元），所以总收入 18+12+20=50（元），多营利 10 元。所以选择 B 选项。

16. 【答案】C。

【解析】假设折扣率为x，则

$$10000\times(1+25\%)\times(30\%+70\%x)-10000=-1000\Rightarrow x=0.6$$

# 强化练习四:解方程（组）

1. 3x+7=13

2. 5x−4=11

3. $\frac{5x-2}{3}=1$

4. $\frac{7x+4}{5}=5$

5. 2x−1=5−3x

6. 4x−3=6−2x

7. 1.4x−3.2=0.9x−1.7

8. 1.3×（x−1）=x−0.1

9. $\frac{x}{8}+6=\frac{x}{2}+3$

10. $\frac{x+5}{3}-\frac{x+2}{6}=\frac{x}{2}$

11. $\begin{cases}x+y=7\\x-y=5\end{cases}$

12. $\begin{cases}2x+3y=11\\2x-3y=5\end{cases}$

13. $\begin{cases}5x+2y=7\\3x-2y=1\end{cases}$

14. $\begin{cases}5x+4y=23\\3x-2y=5\end{cases}$

15. $\begin{cases}5x+2y=27\\3x-5y=10\end{cases}$

16. $\begin{cases}y=\frac{2x+7}{5}\\y=\frac{3x+9}{7}\end{cases}$

17. $\begin{cases}y=\frac{3x+2}{4}\\2x-y=7\end{cases}$

18. $\begin{cases}y=\frac{2x+5}{3}\\4x-y=5\end{cases}$

19. $\begin{cases}\frac{2x+1}{3}-\frac{3y+4}{5}=1\\\frac{2x+1}{3}+\frac{3y+4}{5}=5\end{cases}$

20. $\begin{cases}\frac{4x+5}{3}+\frac{2y+6}{5}=5\\\frac{8x+10}{3}-\frac{3y+9}{5}=3\end{cases}$

21. $\begin{cases}x+2y+3z=14\\2x+3y+z=11\\3x+y+2z=11\end{cases}$

22. $\begin{cases}x+y+z=8\\x-y+z=6\\2x+y-z=3\end{cases}$

23. $\begin{cases}z=x-y\\2x-3y+z=-6\\3x+y-2=10\end{cases}$

24. $\begin{cases}x=3z-y\\y=\frac{x+z}{2}\\z=x-y+2\end{cases}$

25. $\frac{x+7}{4x-5}=3$

26. $\frac{2}{3x-9}-\frac{1}{2x-6}=\frac{1}{12}$

27. $\sqrt{3x-2}=2$

28. $\frac{\sqrt{x}+1}{3}+\frac{7-\sqrt{x}}{5}=2$

29. $\begin{cases}\frac{6}{x}+\frac{6}{y}=5\\\frac{8}{x}-\frac{9}{y}=1\end{cases}$

30. $\begin{cases}\frac{21}{3x+y}-\frac{6}{2x-y}=1\\\frac{14}{3x+y}+\frac{9}{2x-y}=5\end{cases}$

31. $\begin{cases}\sqrt{x-3}+\sqrt{y+4}=3\\\sqrt{x-3}-\sqrt{y+4}=1\end{cases}$

32. $\begin{cases}3\sqrt{x}+2\sqrt{y}=7\\2\sqrt{x}-\sqrt{y}=0\end{cases}$

33. 求3x+4y=17的正整数解

34. 求5x+3y=23的正整数解

35. 求4x+7y=26的正整数解

36. 求3x+8y=17的正整数解

37. 若$\begin{cases}11x+5y+2z=9\\7x+3y+z=5\end{cases}$，求x+y+z

38. 若$\begin{cases}10x+4y+7z=17\\13x+5y+9z=22\end{cases}$，求x+y+z

39. $\frac{2}{3}\left(\frac{3}{4}\left[\frac{4}{5}\left[\frac{5}{6}(x-6)-5\right]-4\right]-3\right)-2=10$

40. $\frac{1}{3+\frac{3}{2-\frac{1}{1-\frac{5}{x}}}}=1$

# 第 06 讲　盈亏与鸡兔同笼问题

这两类问题是小学奥数当中的经典题型，利用一定的设计和思维，可以进行奇妙的解答。同时，“列方程，解方程”也是精确、高效的方法。

方程法相对有两个优点：（1）不需要进行方法设计上的思考，只需要进行机械的、固化的程序化答题；（2）计算不容易出错。

所以大家要踏实地把方程法掌握。

**一、盈亏问题**

1. 正值毕业季，班长小李组织大家聚餐，费用均摊，结账时，如果每人付 300 元，则多出 100 元；如果每人付 290 元，小李自己要多付 80 元才刚好，那么，这次活动的人均费用大约是（　　）元。

A.293　　B.296　　C.295　　D.294

2. 村官小刘负责将村委会购买的一批煤分给村中的困难户，如果给每个困难户分 300 千克煤，则缺 500 千克；如果给每个困难户分 250 千克煤，则剩余 250 千克。为帮助困难户，村委会购买了多少煤？（　　）

A.5500 千克　　B.5000 千克　　C.4500 千克　　D.4000 千克

[注意]盈亏问题在经典小学奥数中是这样考虑的：假设一开始每个困难户分了 250 千克煤，那么剩余了 250 千克；后来改成每个困难户分 300 千克煤，相当于每户还要多分配 50 千克 ，那么除了将之前剩余的 250 千克全部分下去之外，还缺少了 500 千克。也就是说，如果每户还要多分配 50 千克的话，总共需要分配 250+500=750 千克的煤，那么户数应该就是 750÷50=15（户），进而可以得到煤的总量。所以总结下来，盈亏问题的公式就是（以本题为例）：户数=盈亏之和÷每户分配量之差=（500+250）÷（300-250）。

如果可以熟练掌握这种思维，用公式确实比方程要快；但如果这种方法掌握不好，特别容易出错。所以一般情况下，还是建议大家使用方程来求解。

## 二、鸡兔同笼与做对做错问题

是指在应用题中给出了鸡和兔子的总头数和总腿数，求鸡和兔子各有多少只的一类问题。鸡兔同笼问题在解答过程中用到假设的思路，可以假设都是兔子，这样总腿数就比实际腿数要多，多出来的腿数就是把鸡当兔子多算的，因此再除以一只鸡比一只兔子少的腿数就可以求得鸡有多少只。也可以假设成都是鸡，这样就可以求得兔有多少只。

盈亏问题与鸡兔同笼问题基本解题方法：

一般情况下推荐使用“列方程”的方法

基本关系式为：

**方法 1：设鸡求兔**

（总足数-2×总头数）÷（4-2）=兔头数

总头数-兔头数=鸡头数

**方法 2：设兔求鸡**

（4×总头数-总足数）÷（4-2）=鸡头数

总头数-鸡头数=兔头数

**注：**生活中的一些“得失”问题也可以用“假设法”来解答，其关系式为：

**方法 1：设得求失**

（每件应得×总件数-实得数）÷（每件应得+每件损赔）=损失件数

**方法 2：设失求得**

（每件损赔×总件数+实得数）÷（每件应得+每件损赔）=所得件数

1. 在同一个笼子中，有鸡和兔两种动物，如果鸡头和兔头共有 50 个，鸡脚和兔脚共有 134 只，问笼子中有鸡和兔各多少只？（　　）

A. 26，24　　B. 27，23　　C. 33，17　　D. 30，20

2. 动物园有一群孔雀和大象，它们共有 48 只眼睛和 56 只脚，该动物园有孔雀和大象各多少只？（　　）

A. 16，8　　B. 18，8　　C. 20，4　　D. 20，6

3. 某次测验有 50 道判断题，每做对一题得 3 分，不做或做错一题倒扣 1 分，某学生共得 82 分，问答对题数和答错题数（包括不做）相差多少？（　　）

A.33　　B.39　　C.17　　D.16

4. 某零件加工厂按照工人完成的合格零件和不合格零件支付工资，工人每做出一个合格零件能得到工资 10 元，每做一个不合格零件将被扣除 5 元，已知某人一天共做了 12 个零件，得工资 90 元，那么他在这一天做了多少个不合格零件？（　　）

A.2　　B.3　　C.4　　D.6

5. 某人搬运 2000 只易碎物品，每只运费为 3 角。如果损坏一只不但不给运费，还要赔偿 5 角，结果共得 560 元，问他损坏了多少只?（　　）

A.80 只　　B.70 只　　C.60 只　　D.50 只

6. 甲、乙、丙 3 名同学参加数学竞赛，共 10 道题，答对一道得 10 分，答错一道扣 3 分，如果这 3 名同学都回答了所有的题，甲得了 87 分，乙得了 74 分，丙得了 9 分，那么三人一共答对了多少道题?（　　）

A.18　　B.20　　C.23　　D.26

7. 蜘蛛有 8 条腿，蜻蜓有 6 条腿和 2 对翅膀，蝉有 6 条腿和 1 对翅膀，现在这三种小虫共 18 只，有 118 条腿和 18 对翅膀，蜘蛛、蜻蜓、蝉各几只?(　　)

A.5、5、8　　B.5、5、7　　C.6、7、5　　D.7、5、6

# 参考答案及解析

1. 【答案】C。

【解析】此题可通过设立二元一次方程组求解，但这不是简便方法，简便方法求解如下：假设 50 个头都是兔头，由于每只兔有 4 只脚，则 50 个头对应 200 只脚，而实际上有 134 只脚，则多算了 66 只脚，而每只鸡有 2 只脚，则每只鸡多算了 2 只脚，则鸡的只数为：66÷2＝33（只），于是兔的只数为：50－33＝17（只），从而选 C。

2. 【答案】C。

【解析】它们有 48 只眼睛也就是有 24 个只大象和孔雀，假设 24 只都是大象，由于每只大象有 4 只脚，则应该有 96 只脚，但实际只有 56，少了 40 只脚，这是由于每只孔雀只有 2 只脚，从而孔雀有 40÷2＝20（只），大象有 24－20＝4（只），故选 C。

【注】设总头数为 a，足数是 b，则 b/2-a 是兔数，a-(b/2-a)是鸡数。

或　　鸡数=（4×头总数-总足数）/2　　兔数=总数-鸡数

或　　兔数=（总足数-2×头总数）/2 鸡数=总数-兔数

3. 【答案】D。

【解析】【解析】方法一：假设全部都做对，能得到 50×3=150 分，实际少得 150-80=68 分，又知道不做或做错倒扣一分，实际上是扣了 4 分，是答错了 68÷4=17 题。相差（50-17）-17=16 题。故选 D。

方法二：设答对了 x 道，则 3x-（50-x）=82，解得 x=33 道，则答错了 50-33=17 道，故答对题数和答错题数相差 33-17=16 道。故选 D。

4. 【答案】A。

【解析】方法一：假设 12 个零件都合格，则可以得到 12×10=120 元，实际只得到 90 元，这少得的 120-90=30 元都是因为有不合格产品造成的。又知道一个不合格零件比一个合格零件少 10+5=15 元，那么不合格的零件有 30÷15=2 个。故选 A。

方法二：方程法。设不合格的零件有 x 个，则合格的零件有 12-x 个，根据题意列方程得：10（12-x）-5x=90。解方程可得 x=2 个。故选 A。

5. 【答案】D。【解析】如果物品都没有损坏，他应得 600 元钱。他每损坏一只就要减少 0.3+0.5=0.8 元收入，那么他损坏的数量为（600-560）÷0.8=50 只。故选 D。

6. 【答案】B。

【解析】甲得了 87 分，若 10 题都做对，应得 10×10=100 分，实际少得 100-87=13 分，每做错一道题少得 10+3=13 分，所以甲做错 13÷13=1 道题；同理，乙做错(100-74)÷13=2 道题，丙做错(100-9)÷13=7 道题；三人一共答对 10×3-(1+2+7)=20 道题。故选 B。

7. 【答案】A。

【解析】三者同笼，转化为两者同笼。

首先，蜻蜓和蝉都是 6 条腿，计算腿的数量时将它们作为一个整体考虑，则兔←→8 条腿的小虫、鸡←→6 条腿的小虫。（转化为“两者同笼”）

假设全是 6 条腿的小虫，套用设鸡求兔的公式: 兔数=(总脚数-每只鸡脚数×总头数)÷(每只兔脚数-每只鸡脚数)，可得蜘蛛有(118-6×8)÷(8-6)=5 只，（套用公式）

那么蜻蜓和蝉共有 18-5=13 只。

再假设这 13 只都是蝉，套用公式，得蜻蜓有(18-1×13)÷(2-1)=5 只，蝉有 13-5=8 只。

此题答案为 A。

## 精选习题训练

1.为响应建设“绿色城市”的号召，某社区义务植树 300 棵，由于参加植树的全体党员植树的积极性高涨，实际工作效率为原来的 1.2 倍，结果提前 20 分钟完成任务，则原来每小时植树多少棵？（　　）

A.120　　　　B.150　　　　C.135　　　　D.125

2.某社区图书馆清点图书库存，发现拥有人文社科类图书数量是自然科学类图书的 2 倍，比儿童图书多 15 册，拥有的儿童图书是生活应用类图书的，其他类图书 76 册，占所有图书的，问该社区图书馆拥有自然科学类图书多少册？（　　）

A.32　　　　B.36　　　　C.40　　　　D.48

3.年初，甲、乙两种产品的价格比是 3：5，年末，由于成本上涨，两种产品的价格都上涨了 9 元，价格比变成了 2：3，则年初时乙的价格比甲高出（　　）元。

A.9　　　　B.18　　　　C.27　　　　D.36

4.8 位大学生打算合资创业，在筹资阶段，有 2 名同学决定考研而退出，使得剩余同学每人需要再多筹资 1 万元；等到去注册时，又有 2 名同学因找到合适工作而退出，那么剩下的同学每人又得再多筹资几万元？（　　）

A.3　　　　B.4　　　　C.1　　　　D.2

5.某大学音乐系学生在学校礼堂举行音乐会，第一场音乐会前三排位置的座位票价是每张 10 元，其他座位的票价是每张 6 元，全场的营业收入为 2040 元；第二场音乐会第四排位置的座位票价也被提升到每张 10 元，全场的营业收入为 2120 元。如果两场音乐会都满座，而且每一排的座位数量也都一样，那么该礼堂一共有（　　）座位。

A.300 个　　　B.320 个　　　　C.480 个　　　　D.500 个

6.一项工程，甲、乙合作 12 天完成，乙、丙合作 9 天完成，丙、丁合作 12 天完成。如果甲、丁合作，则完成这项工程需要（　　）天。

A.16　　　　B.18　　　　C.24　　　　D.26

7.商店促销某种商品，一次购买不超过 10 件，每件 5 元；超过 10 件，超过部分每件 3 元。甲、乙两人分别购买此种商品，甲比乙多付 19 元，则甲、乙共买了多少件？（　　）

A.22　　　　B.21　　　　C.20　　　　D.19

8．某班有 56 名学生，每人都参加了 a、b、c、d、e 五个兴趣班中的其中一个。已知有 27 人参加 a 兴趣班，参加 b 兴趣班的人数第二多，参加兴趣班的人数相同，e 兴趣班的参加人数最少，只有 6 人，问参加 6 兴趣班的学生有多少个？（　　）

A.7 个　　　　B.8 个　　　　C.9 个　　　D.10 个

9. 对分数$\frac{11}{1000}$进行操作，每次分母加 15，分子加 7，问至少经过几次这样的操作能使得到的分数不小于$\frac{1}{5}$？（　　）

A. 46 次　　B. 47 次　　C. 48 次　　D. 49 次

10. 一门课程的满分为 100 分，由个人报告成绩与小组报告成绩组成，其中个人报告成绩占 70%，小组报告成绩占 30%。已知小明的个人报告成绩与同一小组的小欣的个人报告成绩之比为 7：6，小明该门课程的成绩为 91 分，则小欣的成绩最低为多少分？（　　）

A. 78 分　　B. 79 分　　C. 81 分　　D. 82 分

11. 某车队运输一批蔬菜。如果每辆汽车运 3500 千克，那么还剩下 5000 千克；如果每辆汽车运 4000 千克，那么还剩下 500 千克，则该车队有（　　）辆汽车。

A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11

12. 旅游团安排住宿，如果有 4 个房间每间住 4 人，其余房间每间住 5 人，空余 2 个床位；若有 4 个房间每间住 5 人，其余房间每间住 4 人，正好住满。该旅游团有多少人？（　　）

A. 28　　B. 42　　C. 44　　D. 48

13. 股民甲和乙分别持有同一家公司的股票。如果乙将自己的 10000 股转给甲，则此时甲持有该股票的份额是乙的 3 倍；如果甲将自己的 1000 股转给乙，则此时乙持有该股票的份额比甲多 6 倍。那么，甲乙二人共持有（　　）股该公司的股票。

A. 6400　　B. 17600　　C. 17800　　D. 28800

14. 小王参加电视台的一个智力竞赛节目。节目共有 20 道快速问答，答对一题得 10 分，答错或不答均倒扣 10 分，每人开始有基础分 100 分。小王最后成绩为 220 分，问他有几道题没答对？（　　）（假设小王没有不答的题）

A. 5　　B. 6　　C. 3　　D. 4

15. 某剧场 A、B 两间影视厅分别坐有观众 43 人和 37 人，如果把 B 厅的人往 A 厅调动，当 A 厅满座后，B 厅内剩下的人数占 B 厅容量的$\frac{1}{2}$；如果将 A 厅的人往 B 厅调动，当 B 厅满座后，A 厅内剩下的人数占 A 厅容量的$\frac{1}{3}$。问 B 厅能容纳多少人？（　　）

A. 56　　B. 54　　C. 64　　D. 60

16. 甲、乙两个仓库共有货物 102 吨。如果从甲仓库调出 3 吨到乙仓库，那么甲仓库的货物正好是乙仓库的 2 倍。则甲仓库原有货物（　　）吨。

A. 31　　B. 37　　C. 70　　D. 71

## 习题详解

1.B [简析]假设原来的效率为 x，20 分钟合$\frac{1}{3}$小时，则：$\frac{300}{x}-\frac{300}{1.2x}=\frac{1}{3}\rightarrow$x=150。

2.C [简析]设自然科学类图书数量为 x 册，则可得到：

| 自然 | 人文 | 儿童 | 生活 | 其他 |
|---|---|---|---|---|
| x | 2x | 2x-15 | 3（2x-15） | 76 |

列方程：2+2x+2x-15+3(2x-15)+76=76×6，解得 x=40。

3. B [简析]设年初时甲、乙两种商品的价格为 3x、5x，进而得到（3x+9）:（5x+9）=2：3，解得 x=9，则年初时价格高出 2x=2×9=18（元）。

4. D [简析]从最开始的 8 人到后来的 6 人，再到最后的 4 人，我们不妨假设总筹资金额为 24x 万元，那么开始每人需要 3x 万元，2 名同学离开之后每人应该筹资 4x 万元，比原来多 x 万元，所以 x=1。最后只剩 4 人时每人需筹资 6x 万元，得再多筹 6x-4x=2x=2（万元）。

5. A [简析]假设礼堂一共有 N 排座位，每排座位有 a 个，那么：

$$\begin{cases}10\times3\times a+6\times(\mathrm{N}-3)\times \mathrm{a}=2040\\10\times4\times a+6\times(\mathrm{N}-4)\times \mathrm{a}=2120\end{cases}。$$

这个方程组比较特别的是含有 N 和 a 的乘积项，不再是一个一次方程组。于是，我们直接令两式做差，消去 Na，得到：4a=80，所以 a=20，代入易得 N =15，所以礼堂一共有 Na=300（个）座位。

6. B [简析]假设工作总量为 36，则甲、乙、丙、丁的工作效率满足：甲+乙=3，乙+丙=4，丙+丁=3，三个方程包括四个未知数，我们可以令：甲=0，于是：乙=3，丙=1，丁=2，所以：甲+丁=2，甲、丁合作需要 36÷2=18（天）。

7. B [简析]假设甲比乙多买的商品中，有 x 件是 5 元/件，有 y 件是 3 元/件，那么：5x+3y=19，试值可知，只有 x=2、y=3 这一组解，所以乙应该是 8 件，甲为 13 件，总共 21 件。

8. C [简析]设参加 b 兴趣班的人数为 x 人，c、d 兴趣班的人数为：y 人，则 27+x+y+y+6=56，得到 x+2y=23。x 显然是奇数，排除 B、D。代入 A 选项，x=7，y=8，不满足条件，也排除。

9. C [简析]设 x 次后满足条件，则：$\frac{11+7x}{1000+15x}\geqslant\frac{1}{5}\rightarrow$x≥47.25，所以最少 48 次。

10. C [简析]因为个人报告成绩占 70 分，所以个人成绩在 0—70 分之间，而小组报告成绩在 0—30 分之间。假设小明和小欣的个人成绩分别为 7x、6x（满足 0≤x≤10），而小组报告成绩为 y，那么小明的成绩为 7x+y=91，而小欣的成绩应该为 6x+y=（7x+y）-x=91-x≥91-10=81（分）。

11. B [简析]假设汽车有 x 辆，蔬菜有 y 千克，则：$\begin{cases}y=3500x+5000\\y=4000x+500\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=9\\y=36500\end{cases}$。

12. C [简析]假设房间有 x 间，旅游团有 y 人，则：$\begin{cases}y=4\times4+(\mathrm{x}-4)\times5-2\\y=4\times5+(\mathrm{x}-4)\times4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=10\\y=44\end{cases}$。

13. B [简析]假设甲持有 x 股，乙持有 y 股，则$\begin{cases} x+10000=(y-10000)\times 3 \\ (x-1000)\times 7=y+1000 \end{cases}\rightarrow$ $\begin{cases} x=3200 \\ y=14400 \end{cases}\rightarrow$x+y=17600。

14. D [简析]假设答对 x 道题，没答对 y 道题，则：$\begin{cases} x+y=20 \\ 10x-10y+100=220 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=16 \\ y=4 \end{cases}$。

15. C [简析]设 A、B 厅容量分别为 x、y，则：$\begin{cases} x+\frac{y}{2}=43+37 \\ \frac{x}{3}+y=43+37 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=48 \\ y=64 \end{cases}$。

16. D [简析]设甲、乙仓库分别原有 x、y 吨，则：$\begin{cases} x+y=102 \\ x-3=(y+3)\times 2 \end{cases}\rightarrow\begin{cases} x=71 \\ y=31 \end{cases}$。

# 第 07 讲　溶液问题

**课前导学**

**浓度问题核心公式：**

**溶液＝溶质+溶剂；浓度＝溶质÷溶液；溶质＝溶液×浓度；溶液＝溶质÷浓度**

1.一杯含盐 15%的盐水 200 克，要使盐水含盐 20%，应加盐多少克？（　　）

A.12.5　　B.10　　C.5.5　　D.5

【解析】原溶液中含盐量为(200×15%)克，设应加盐 x 克，则加盐后溶质为 200×15%+x，溶液为 200+x，浓度为 20%。根据核心公式，可列方程(200×15%+x)÷(200+x)=20%，解得 x=12.5。选择 A。

浓度问题的一般解题思路是：（1）分阶段清理题干中的三量，通过公式逐步求解。（2）找出溶液变化前后，溶质、溶液、浓度这三量的不变量，再通过不变量列方程求解。

2.现有浓度为 20%的食盐水与浓度为 5%的食盐水各 1000 克，分别倒出若干配成浓度为 15%的食盐水 1200 克。问若将剩下的食盐水全部混合在一起，得到的盐水浓度为（）。

A.10%　　B.6.25%　　C.7.5%　　D.8.75%

【解析】根据题意，食盐水中共有食盐 1000×20%+1000×5%=250 克;200 克 15%的食盐水中含有食盐 1200×15%=180 克,则剩下的食盐水的浓度为(250-180)÷(1000+1000-1200)×100%=8.75%，选 D。

3.一容器内有浓度为 30%的糖水，若再加入 30 千克水与 6 千克糖，则糖水的浓度变为 25%。问原来糖水中含糖多少千克？

A.15 千克　　B.18 千克　　C.21 千克　　D.24 千克

解析：题目是两种不同溶液混合的问题。设原来糖水中含糖 x 千克，则原来糖水质量是 x÷30%= $\frac{10}{3}$x；混合后的溶液含糖(x+6)千克，糖水质量是$\frac{10}{3}$x+30+6。依题意有:

(x+6) ÷$\frac{10}{3}$x+30+6=25%,解得 x=18, 选 B。

4.浓度为 15%的盐水若干克，加人一些水后浓度变为 10%，再加人同样多的水后， 浓度为多少？

A.9%　　B.7.5%　　C.6%　　D.4.5%

**解析**:假设盐水有 100 克，则食盐有 100×l5%=15 克，第一次加入 a 克水，则$\frac{15}{100+a}$=10%，解得 a=50，则所求为$\frac{15}{100+50+50}$=7.5%

1. 甲容器有浓度为3％的盐水190克，乙容器中有浓度为9％的盐水若干克，从乙容器中取出210克盐水倒入甲容器中，则甲容器中盐水的浓度是多少？（　　）

A. 5.45％　　B. 6.15％　　C. 7.35％　　D. 5.95％

2. 将1千克浓度为X的酒精，与2千克浓度为20%的酒精混合后，浓度变为0.6X。则X的值为（　　）。

A.50%　　B.48%　　C.45%　　D.40%

3. 将700克14.3％的盐水与900克11.1％的盐水混合后，再加入200克盐，蒸发掉300克水后，该盐水的浓度为（　　）。

A. 22.2％　　B. 24.3％　　C. 26.7％　　D. 28.6％

4. 有两瓶质量均为100克且浓度相同的盐溶液，在一瓶中加入20克水，在另一瓶中加入50克浓度为30%的盐溶液后，它们的浓度仍然相等，则这两瓶盐溶液原来的浓度是（　　）。

A.36%　　B.64%　　C.50%　　D.60%

5. 瓶子里装有20%的酒精1千克，现分别倒入100克和500克的甲、乙两种酒精，此时瓶子里的酒精浓度变为13%。若甲酒精是乙酒精浓度的3倍，那么甲酒精的浓度是多少？

A.1%　　B.3%　　C.5%　　D.7%

6. 某种鸡尾酒的酒精浓度为20%，由A种酒、B种酒和酒精浓度（酒精重量÷酒水总重量）为10%的C种酒按1：3：1的比例（重量比）调制成。已知B种酒的酒精浓度是A种酒的一半，则A种酒的酒精浓度是（　　）。

A.36%　　B.30%　　C.24%　　D.18%

7. 甲杯中有浓度为17％的溶液400克，乙杯中有浓度为23％的溶液600克。现在从甲、乙两杯中取出相同总量的溶液，把从甲杯中取出的倒入乙杯中，把从乙杯中取出的倒入甲杯中，使甲、乙两杯溶液的浓度相同。问现在两杯溶液的浓度是多少（　　）

A.20％　　　B.20.6％　　　C.21.2％　　　D.21.4％

8. 甲杯中有浓度为17％的溶液400克，乙杯中有浓度为23％的溶液600克。现在从甲、乙两杯中取出相同总量的溶液，把从甲杯中取出的倒入乙杯中，把从乙杯中取出的倒入甲杯中，使甲、乙两杯溶液的浓度相同。问取出的量是多少？（　　）

A.200　B.240　C.250　D.260

9. 在某状态下，将28g某种溶质放入99g水中恰好配成饱和溶液，从中取出1/4溶液加入4g溶质和11g水，请问此时浓度变为多少？（　　）

A. 21.61％　　B. 22.05％　　C. 23.53％　　D. 24.15％

10.　有两只相同的大桶和一只空杯子，甲桶装牛奶，乙桶装糖水。先从甲桶内取出一杯牛奶倒入乙桶，再从乙桶中取出一杯糖水和牛奶的混合液倒入甲桶。请问此时甲桶内的糖水多还是乙桶内的牛奶多？（　　）

A.无法判定　　B.甲桶糖水多　　C.乙桶牛奶多　　D.一样多

11.　三个容积相同的瓶子里装满了酒精溶液，酒精与水的比分别是2:1,3:1,4:1。当把三瓶酒精溶液混合后，酒精与水的比是多少?（　　）

A.133:47　B.131:49　C.33:12　D.3:1

12.　一杯糖水，第一次加入一定量的水后，糖水的含糖百分比变为60%；第二次又加入同样多的水，糖水的含糖百分变比为40%；第三次再加入同样多的水，糖水的含糖百分比将变为多少？（　　）

A.30%　　B.25%　　C.20%　　D.18%

13. 一个容器内有若干克盐水。往容器内加入一些水，溶液的浓度变为3％，再加入同样多的水，溶液的浓度为2%，问第三次再加入同样多的水后，溶液的浓度是多少？

A.1.8% B.1.5% C.1% D.0.5%

14. 一种溶液，蒸发一定水后，浓度为10%；再蒸发同样的水，浓度为12%；第三次蒸发同样多的水后，浓度变为多少？（ ）

A.14% B.17% C.16% D.15%

15. 某科学兴趣小组在进行一项科学实验，从装满100克浓度为80%的盐水中倒出40克盐水后，再倒入清水将杯倒满，搅拌后再倒出40克盐水，然后再倒入清水将杯倒满，这样反复三次后，杯中盐水的浓度是（ ）。

A.11.52% B.17.28% C.28.8% D.48%

16. 从装满1000克浓度为50％的酒精瓶中倒出200克酒精，再倒入蒸馏水将瓶加满。这样反复三次后，瓶中的酒精浓度是多少?( )

A. 22.5％ B. 24.4％ C. 25.6％ D. 27.5％

17. 杯中原有浓度为18％的盐水溶液100ml，重复以下操作2次，加入100ml水，充分混合后，倒出100ml溶液，问杯中盐水溶液的浓度变成了多少?( )

A. 9％ B. 7.5％ C. 4.5％ D. 3.6％

**多次混合问题核心公式：**

1.设盐水瓶中盐水的质量为M，每次操作中先倒出$M_0$克盐水，再倒入$M_0$克清水：

（多次混合问题第一种类型，$C_0$为原浓度，$C_n$为新浓度）

2.设盐水瓶中盐水的质量为M，每次操作中先倒入$M_0$克清水，再倒出$M_0$克盐水：

（多次混合问题第二种类型，$C_0$为原浓度，$C_n$为新浓度）

**课后真题练习：**

1. 某体育训练中心，教练员中男占 90%，运动员中男占 80%，在教练员和运动员中男占 82%，教练员与运动员人数之比是多少？(　　)

A.2：5　　B.1：3　　C.1：4　　D.1：5

2. 某单位共有员工 25 人，他们的平均年龄为 28 岁，其中男员工的平均年龄为 30 岁，女员工的平均年龄为 25 岁，问男员工比女员工的人数多多少？(　　)

A.3 人　　B.4 人　　C.5 人　　D.6 人

3. 某班一次数学测试，全班平均 91 分，其中男生平均 88 分，女生平均 93 分，则女生人数是男生人数的多少倍？(　　)

A.0.5　　B.1　　C.1.5　　D.2

4. 某超市购进西瓜 1000 个，运输途中碰裂一些，未碰裂的西瓜卖完后，利润率为 40%，碰裂的西瓜只能降价出售，亏本 60%，最后结算时总的利润率为 32%，碰裂了多少西瓜？(　)

A.80　　B.75　　C.85　　D.78

5. 某市现有 70 万人口，如果 5 年后城镇人口增加 4%，农村人口增加 5.4％，则全市人口将增加 4.8%，那么这个市现有城镇人口多少万？（　　）

A.30　　B.31.2　　C.40　　D.41.6

6. 某养鸡场计划购买甲、乙两种小鸡苗共 2000 只进行饲养，已知甲种小鸡苗每只 2 元，乙种小鸡苗每只 3 元。相关资料表明：甲、乙两种小鸡苗的成活率分别为 94％和 99％。若要使这批小鸡苗的成活率不低于 96％，且买小鸡苗的总费用最小，则应选购甲、乙两种小鸡苗各（　　）。

A.500 只、1500 只　　B.800 只、1200 只

C.1100 只、900 只　　D.1200 只、800 只

7. 一满杯纯牛奶，喝去 20%后用水加满，再喝去 60%。此时杯中的纯牛奶占杯子容积的百分数为（　　）。

A.52%　　B.48%　　C.42%　　D.32%

8. 当含盐 30%的 60 千克盐水蒸发为含盐 40%的盐水时，盐水重量为多少千克？（　　）

A.40　　B.45　　C.50　　D.55

9. 将 10 克盐和 200 克浓度为 5%的盐水一起加入一杯水中，可得浓度为 2.5%的盐水，则原来杯中水的克数是（　　）。

A.570　　B.580　　C.590　　D.600

10.　　有 100 克溶液，第一次加入 20 克水，溶液的浓度变成 50%；第二次再加入 80 克浓度为 40%的同种溶液，则溶液的浓度变为多少？（　　）

A. 45%　　B. 47%　　C. 48%　　D. 46%

11.　　一容器内有浓度为 30%的糖水，若再加入 30 千克水与 6 千克糖。则糖水的浓度变为 25%。问原来糖水中含糖多少千克？（　　）

A. 15千克　　B. 18千克　　C. 21千克　　D. 24千克

12.　　在某温度下，将 27 克某种溶质放入 98 克水中，恰好配成饱和溶液。从中取出 $\frac{1}{5}$的溶液，加入 3 克溶质和 10 克水，请问此时浓度变为多少？（　　）

A. 21.6%　　B. 22.1%　　C. 22.5%　　D. 23.4%

13.　　从装满 1000 克酒精浓度为 52%的酒瓶中倒出 200 克酒，再倒入蒸馏水将瓶加满，这样反复 3 次后，酒瓶中的酒精浓度是多少？（　　）

A. 28.74%　　B. 27.68%　　C. 26.62%　　D. 25.84%

14.　　某盐溶液的浓度为 20%，加入水后，溶液的浓度变为 15%，如果再加入同样多的水，则溶液的浓度变为（　）

A. 13%　　B. 12.5%　　C. 12%　　D. 10%

15.　　将 40 千克浓度 16%的溶液蒸发一部分水，化为 20%的溶液。应蒸发水多少千克？

A. 8千克　　B. 9千克　　C. 10千克　　D. 11千克

16.　　化学实验中，需要使用现有不同浓度的 A、B 两种氯化钠溶液配置新的浓度为 15%的氯化钠溶液。已知 A 溶液的浓度是 B 溶液的 5 倍，且若将 50 克 A 溶液与 250 克 B 溶液混合即能完成配置，那么 A 溶液的浓度是（　）。

A. 45%　　B. 40%　　C. 35%　　D. 30%

17.　　瓶中装有浓度为 20%的酒精溶液 1000 克，现在又分别倒入 200 克和 400 克 a 的 A、B 两种酒精溶液，瓶里的溶液浓度变为 15%。已知 A 种酒精溶液的浓度是 B 种酒精溶液浓度 的 2 倍。那么 A 种酒精溶液的浓度是多少？（　　）

A.5%　　B.6%　　C.8%　　D. 10%

# 精选真题练习参考答案

1. 【答案】C。

【解析】运用十字交叉法可知教练员与运动员人数的比例为 1：4。

2. 【答案】C。

【解析】运用十字交叉法可知男员工人数与女员工人数的比例为 3：2=15：10，男比女多 5 人。

3. 【答案】C。

【解析】运用十字交叉法可知女生人数与男生人数的比例为 3：2，女生人数是男生人数的 1.5 倍。

4. 【答案】A。

【解析】运用十字交叉法可知未碰裂的西瓜数与碰裂的西瓜数比例为 92：8=920：80，故碰裂了 80 个西瓜。

5. 【答案】A。

【解析】运用十字交叉法可知城镇人口数与农村人口数的比例为 3：4=30：40，城镇人口数 30 万。

6. 【答案】D。

【解析】因为希望总费用尽可能小，那么尽可能使用便宜的甲种小鸡苗，但甲种成活率较低，所以使用 的比例最好保证两种小鸡苗的总体成活率恰好为 96%。对成活率进行“+字交叉法”：

甲种小鸡苗　94%　　3%

96%

乙种小鸡苗　99%　　2%，比例为 3:2，结合选项，选择 D。

7. 【答案】D。

[解析]我们假设容器容量为 100 升，那么最开始有 100 升的牛奶，由于喝掉了 20 升，所以还剩下 80 升牛奶。加水后又喝掉 60%，只剩下 40%，所以还剩牛奶 80×40%＝32(升)，占原来的 32%，选择 D。

8. 【答案】B。

【解析】设最后盐水重量为 x 千克，溶质不变，得 60× 30%=x× 40%, x=45。

9. 【答案】C。

【解析】设原有清水 x 克，得$\frac{10+200\times5\%}{x+10+200}$=2.5%, x=590。

10. 【答案】D。

【解析】本题相当于是 120 克 50%的溶液与 80 克 40%的溶液混合，根据公式：浓度=（120×50%+80×40%）÷（120+80）=46%，选择 D。

11. 【答案】B。

【解析】假设原来糖水中含糖 X 千克，那么其糖水总重应该为（X÷0.3）千克，于是可以得到：（X+6）÷（X÷0.3+30+6）=25%，得到 X=18。

12. 【答案】A。

【解析】很明显，新加入的溶质和水的比例高于原饱和溶液（3:10>27:98），所以得到的 最终溶液也应该是饱和溶液，其浓度为：27÷（27+98）=21.6%。

13. 【答案】C。

【解析】倒出比例为$\frac{1}{5}$，根据公式，浓度为：52%×（$1-\frac{1}{5}$）$^3$=26.624%。

14. 【答案】C。

【解析】假设溶质为 60，最开始溶液为 60÷20%=300，加水后的溶液为 60÷15%=400，所以 再加同样多的水后溶液应该为 500，故浓度为 60÷500=12%。

15. 【答案】A

【解析】分析题干可知，溶液中不变的是溶质，进而可得蒸发水后剩余溶液质量为

40×16%÷20%=32（千克），因此蒸发了8千克的水。答案选择A。

16. 【答案】A

【解析】设 A 溶液的浓度为 x，结合溶液问题基本公式，可得 50x+250×$\frac{x}{5}$=(50+250) ×15%，解得 x=45%。答案选择 A。

17. 【答案】D

【解析】设 A 种酒精溶液的浓度为 x，则 B 种酒精溶液的浓度为 0.5x，根据溶液问题基本公式，可得 1000×20%+200x+400×0.5x=（1000+200+400）×15%，解得 x=10%。答案选择 D。

# 第 08 讲　工程问题

## 课前导学

**核心公式：工作效率×工作时间=工作量**

**工作量÷工作效率=工作时间**

**工作量÷工作时间=工作效率**

**结论 1:工作量一定，工作时间与工作效率成反比**

**结论 2:工作时间相同，工作量与工作效率成正比**

**结论 3:工作效率相同，工作量与工作时间成正比**

1.一项工程，工作效率提高四分之一，完成这项工程的时间将由原来的十小时缩短到几小时？

A.4　　B.8　　C.12　　D.16

【解析】原来完成这项工程要 10 小时，假设总量为 10，则原来效率为 1。现在效率为 1.25，则时间为 10÷1.25=8 小时。

时间与效率成反比，则$\frac{原用时}{现用时}=\frac{现效率}{原效率}$ → $\frac{10}{x}=\frac{1.25}{1}$。x=8

2.修一条公路，假设每人每天的工作效率相同，计划 180 名工人 1 年完成，工作 4 个月后，因特殊情况，要求提前 2 个月完成任务，则需要增加工人多少名？

A.50　　B.65　　C.70　　D.60

【解析】工作 4 个月后剩下 12-4=8 个月，提前 2 个月完成，即要求 6 个月完成。工作量一定时，工作效率之比等于时间的反比，因此增加工人前后的工作效率比为 6：8=3：4。增加后的工人数为 180÷3×4=240 人，增加 240-180=60 人，选 D。

3.A、B、C、D 四个工程队修建一条马路，A、B 合作可用 8 天完成，A、C 或 B、D 合作可用 7 天完成，问 C、D 合作能比 A、B 合作提前多少天完成？

A. $\frac{16}{9}$　　B. $\frac{15}{8}$　　C. $\frac{7}{4}$　　D.2

【解析】设工程总量为 56，则效率如下：

A+B=$\frac{56}{8}$=7，A+C=$\frac{56}{7}$=8 或 B+D=$\frac{56}{7}$=8，则 C+D=9

C、D 所需时间=$\frac{56}{9}$天，可以提前：8-$\frac{56}{9}$=$\frac{16}{9}$天。

## 基本技巧

1. 有一只木桶，上方有两个水管，单独打开第一个，20 分钟可装满木桶；单独打开第二个，10 分钟可装满木桶。木桶底部有一小孔，水可以从孔中流出，一满桶水用 40 分钟流完。若同时打开两个水管，水从小孔中也同时流出，经过多长时间木桶才能装满水?。

A.10分钟　　B.9分钟　　C.8分钟　　D.12分钟

2. 某项工程若由甲、乙两队合作需 105 天完成，甲、丙两队合作需 60 天，丙、丁两队合作需 70 天，甲、丁两队合作需 84 天。问这四个工程队的工作效率由低到高的顺序是什么?

A.乙、丁、甲、丙　　B.乙、甲、丙、丁

C.丁、乙、丙、甲　　D.乙、丁、丙、甲

## 各类题型

### 1.比例关系型

3. 某项工程计划 300 天完工，开工 100 天后，由于施工人员减少，工作效率下降了 20%，问完成该项工程比原计划推迟了多少天？（　　）

A.40　　B.50　　C.60　　D.70

### 2.多人合作问题

这类问题的解题思路是设工程总量为“1”，找出各自的工作效率，求出工作效率之和。与单人工作不同的是，工作量对应为合作完成的工作量，工作效率对应为工作效率之和。根据前面的基本公式，有:

**工作总量=$t_1$×效率 1+$t_2$×效率 2+…+$t_n$×效率 n**

4. 一项工程，甲一人做完需 30 天，甲、乙合作完成需 18 天，乙、丙合作完成需 15 天，甲、乙、丙三人共同完成该工程需（　　）。

A. 10 天　　B. 12 天　　C. 8 天　　D. 9 天

5. 水池上装有 A、B 两个注水管，单开 A 管 40 分钟可以注满整个水池，若两管同时注水 3.5 分钟，可注满水池的$\frac{1}{8}$，那么单开 B 水管需要多少分钟注满水池？（ ）

A. $\frac{280}{3}$　　B. 60　　C. $\frac{378}{5}$　　D. 68

6. 一口水井，在不渗水的情况下，甲抽水机用 4 小时可将水抽完，乙抽水机用 6 小时可将水抽完。现用甲、乙两台抽水机同时抽水，但由于渗水，结果用了 3 小时才将水抽完。问在渗水的情况下，用乙抽水机单独抽，需几小时抽完？（ ）

A. 12小时　　B. 13小时　　C. 14小时　　D. 15小时

**3. 混合工作问题**

一项工程，甲、乙合作，一段时间后，甲休息了几天，再接着工作。两人一共花了 N 天完成。

**解题思路:** 甲休息了 n 天，乙工作了 N 天，则乙的工作量=乙的工作效率×N，根据甲工作量+乙工作量="1"，甲的工作量="1"-乙工作量，则甲的工作时间=甲的工作量÷工作效率。

7. 加工一批零件，甲单独完成需要 24 天，乙单独完成需要 30 天。现在甲乙两人一起加工这批零件，但甲中途因故离开，最后这批零件从开始到结束共花了 20 天，则甲离开了（ ）。

A. 8 天　　B. 9 天　　C. 10 天　　D. 12 天

8. 某商铺甲乙两组员工利用包装礼品的边角料制作一批花朵装饰门店。甲组单独制作需要 10 小时，乙组单独制作需要 15 小时，现两组一起做，期间乙组休息了 1 小时 40 分，完成时甲组比乙组多做 300 朵。问这批花有多少朵?

A. 600　　B. 900　　C. 1350　　D. 1500

9. 甲、乙两人加工一批零件，由甲单独做需 36 小时，由乙单独做需 27 小时；现由乙先开始做 6 小时，然后甲、乙两人同时做，完成任务时，甲加工的零件个数是 600 个，由乙加工零件的个数是( )

A. 1200　　B. 1800　　C. 2000　　D. 2100

**4.两人或多人按同一顺序轮流工作**

这类问题的表述一般为：一项工作，甲单独做需要 x 小时，乙单独做需要 y 小时，丙单独做需要 z 小时，按照甲、乙、丙、甲、乙……的顺序轮流工作，每次 1 小时，问完成工作需要多久?

解题步骤如下:

(1)求出一个循环完成的工作量 x;

(2)求出“1”÷x 的整数部分;

(3)求出经过[“1”÷x]整数个循环后的剩余工作量;

(4)利用剩余的工作量求还需要的时间，即可求出总工作时间。

10. 单独完成某项工作，甲需要 16 小时，乙需要 12 小时，如果按照甲、乙、甲、乙、……的顺序轮流工作，每次 1 小时，那么完成这项工作需要多长时间?（ ）

A.13 小时 40 分钟 B.13 小时 45 分钟 C.13 小时 50 分钟 D.14 小时

11. 某项工作，甲单独做要 18 小时完成，乙要 24 小时完成，丙需要 30 小时才能完成。现按甲、乙、丙的顺序轮班做，每人工作一小时后换班，问当该项工作完成时，乙共做了多长时间?（ ）

A.8 小时 B.7 小时 44 分 C.7 小时 D.6 小时 48 分

**5.合作后工作效率改变**

两人或多人合作后，有可能会出现配合不好，各自的工作效率均降低；配合默契，各自的工作效率均提高。解这类问题时，要注意前后工作效率的变化。尤其需要注意这时的三量关系变为:**合作后总的工作效率×合作时间=合作完成的工作量。**

12. 某工厂的一个生产小组，当每个工人都在岗位工作，9 小时可以完成一项生产任务。如果交换工人甲和乙的岗位，其他人不变，可提前 1 小时完成任务；如果交换工人丙和丁的岗位，其他人不变，也可以提前 1 小时完成任务。如果同时交换甲和乙，丙和丁的岗位，其他人不变，可以提前多少小时完成？（ ）

A.1.4 B.1.8 C.2.2 D.2.6

**课后真题练习**

1. 某工程项目，由甲项目公司单独做需 4 天才能完成，由乙项目公司单独做需 6 天才能完成，甲、乙、丙三个公司共同做 2 天就可完成。现因交工日期在即，需多公司合作，但甲公司因故退出，则由乙、丙公司合作完成此项目共需多少天?（　　）

A.3　　B.4　　C.5　　D.6

2. 同时打开游泳池的 A、B 两个进水管，加满水需 1 小时 30 分钟，且 A 管比 B 管多进水 180 立方米。若单独打开 A 管加满水需 2 小时 40 分钟。则 B 管每分钟进水多少立方米?（　）

A.6　　B.7　　C.8　　D.9

3. 蓄水池有一条进水管和一条排水管。要灌满一池水，单开进水管需 5 小时；排光一池水，单开排水管需 3 小时。现在池内有半池水，如果按进水，排水，进水，排水……的顺序轮流各开 1 小时。问:多长时间后水池的水刚好排完?（　　）

A.7 小时 10 分　　B.7 小时 54 分　　C.7 小时 50 分　　D.8 小时 05 分

4. 有 20 人修筑一条公路，计划 15 天完成。动工 3 天后抽出 5 人植树，留下的人继续修路。如果每人工作效率不变，那么修完这段公路实际用多少天?（　　）

A.16　　B.17　　C.18　　D.19

5. 一条隧道，甲单独挖要 20 天完成，乙单独挖要 10 天完成，如果甲先挖 1 天，然后乙接甲挖 1 天，再由甲接乙挖 1 天，…两人如此交替，共用多少天挖完？（　　）

A.14　　B.16　　C.15　　D.13

6. 某项工程项目由甲项目公司单独完成需要 15 天，由乙项目公司单独完成需要 18 天，由丙项目公司单独完成需要 12 天。现因某种原因改为：首先由甲项目公司做 1 天，其次由乙项目公司做 1 天，最后由丙项目公司做 1 天，然后再由甲项目公司做 1 天，…如此循环往复，则完成该工程项目共需（　　）天。

A. $14\frac{1}{3}$　　B. $14\frac{2}{3}$　　C. $13\frac{1}{3}$　　D. $13\frac{2}{3}$

7. 一件工作，甲、乙两人合作 36 天完成，乙、丙两人合作 45 天完成，甲、丙两人合作要 60 天完成。问三人合作需要多少天完成?（　　）

A.18　　B.24　　C.30　　D.33

8. 修一条公路，假定每人每天的工作效率相同，计划 180 名工人 1 年完成，工作 4 个月后，因特殊情况，要求提前 2 个月完成任务，需要增加工人多少名？（　　）

A.50　　B.65　　C.70　　D.60

9. 打印一份稿件，小张 5 小时可以打完这份稿件的$\frac{1}{3}$，小李 3 小时可以打完这份稿件的$\frac{1}{4}$，如果两人合打多少小时可以完成？(　　)

A. 6　　B. $\frac{20}{3}$　　C. 7　　D. $\frac{22}{3}$

10.　一项工程，甲乙合作 15 天完成，他们合作若干天后甲队另有任务，甲这时完成总任务的$\frac{1}{5}$。乙一共做了 16 天完成工程。甲比乙少做几天？(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

11.　某工程由小张、小王两人合作刚好可在规定的时间内完成。如果小张的工作效率提高 20%，那么两人只需用规定时间的$\frac{9}{10}$就可完成工程；如果小王的工作效率降低 25%，那么两人就需延迟 2.5 小时完成工程。问规定的时间是多少小时？(　　)

A. 20 小时　　B. 24 小时　　C. 26 小时　　D. 30 小时

12.　有甲、乙两项工程，张师傅单独完成甲工程需 6 天，单独完成乙工程需 30 天，李师傅单独完成甲工程需 18 天，单独完成乙工程需 24 天，若合作两项工程，最少需要的天数为(　　)

A. 16 天　　B. 15 天　　C. 12 天　　D. 10 天

13.　搬运一个仓库的货物，甲需 10 小时，乙需 12 小时，丙需 15 小时。有同样的仓库 A 和 B，甲在 A 仓库，乙在 B 仓库同时开始搬运货物，丙开始帮甲搬运，中途又转向帮乙搬运，最后同时搬完两个仓库的货物。丙帮助乙搬运了几小时？(　　)

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

14.　一批零件，如果第一天甲做，第二天乙做，这样交替轮流做，恰好用整数天数完成。如果第一天乙做，第二天甲做，这样交替轮流做，做到上次轮流完成时所用的天数后，还剩 60 个不能完成。已知甲、乙工作效率的比是 5:3。问乙每天做多少个？(　　)

A. 60　　B. 70　　C. 80　　D. 90

15.　一空水池有甲、乙两根进水管和一根排水管。单开甲管需 5 分钟注满水池，单开乙管需 10 分钟注满水池。如果单开排水管需 6 分钟将整池水排尽。某次池中没有水，打开甲管若干分钟后，发现排水管未关上，随即关上排水管，同时打开乙管，又过了同样长的时间，水池的$\frac{1}{4}$注了水。如果继续注满水池，前后一共要花多少分钟？(　　)

A. 3　　B. 3.5　　C. 4　　D. 4.5

16.　一项工程，如果甲先做 5 天，那么乙接着做 20 天可以完成；如果甲先做 20 天，那么乙接着做 8 天可以完成。如果甲、乙合作，那么多少天可以完成？(　　)

A. $16\frac{1}{3}$　　B. $16\frac{2}{3}$　　C. 13　　D. $13\frac{1}{3}$

17.　　甲、乙两个工程队修路，最终按工作量分配 8400 元工资。按两队原计划的工作效率，乙队应获 5040 元。实际上从第 5 天开始，甲队的工作效率提高了 1 倍，这样甲队最终可比原计划多获得 960 元。那么两队原计划完成修路任务要多少天?（　　）

A. 16　　B. 14　　C. 12　　D. 10

18.　　一件工程甲单独做 50 小时完成，乙单独做 30 小时完成。现在甲先做 1 小时，然后乙做 2 小时，再由甲做 3 小时，接着乙做 4 小时……两人如此交替工作，完成任务共需多少小时?（　　）

A. 36　　B. $36\frac{2}{3}$　　C. 31　　D. $31\frac{1}{3}$

19.　　一批工人到甲、乙两个工地进行清理工作，甲工地的工作量是乙工地的工作量的 1.5 倍。上午去甲工地的人数是去乙工地人数的 3 倍，下午这批工人中有$\frac{7}{12}$的人去甲工地，其他人到乙工地。到傍晚时，甲工地的工作已做完，乙工地的工作还需 4 名工人再做 1 天。那么这批工人共有多少名?（　　）

A. 38　　B. 44　　C. 40　　D. 36

20.　　一项工程，工作效率提高四分之一，完成这项工程的时间将由原来的十小时缩短到几小时?（　　）

A. 4　　B. 8　　C. 12　　D. 16

21.　　甲、乙合作一件工程，由于配合得好，甲的工作效率比单独做时提高$\frac{1}{10}$，乙的工作效率比单独做时提高$\frac{1}{5}$。甲、乙两人合作 6 小时，完成全部工作的$\frac{2}{5}$。第二天乙又单独做了 6 小时，还留下这件工程的$\frac{13}{30}$尚未完成。如果这件工作始终由甲一人单独来做，需要多少小时?(　　)

A. 32　　B. 33　　C. 34　　D. 35

22.　　有一项工程，若由甲、乙单独做，分别需要 12 天和 18 天完成。若两人合作，因配合不默契，甲的工作效率比原来降低$\frac{1}{3}$。乙的工作效率比原来降低$\frac{1}{4}$，现在要求 11 天完成该工程，问两人至少需要合作多少天?（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

# 精选真题练习参考答案

1. 【答案】B。

【解析】由题意可知甲的工作效率为$\frac{1}{4}$，甲、乙、丙的工作效率和为$\frac{1}{2}$，从而乙和丙的工作效率之和为$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$，所以乙、丙完成项目共需 4 天。

2. 【答案】B。

【解析】先将工作时间化为分钟，1 小时 30 分钟=90 分钟，2 小时 40 分钟=160 分钟。由题意可知 A 管比 B 管每分钟多进水 180÷90=2 立方米，设 B 管每分钟进水 x 立方米，则 A 管每分钟进水(x+2)立方米，根据两次加水情况，有 90×(x+x+2)=160×(x+2)，解得 x=7。

3. 【答案】B。

【解析】设水池容量为 1，则原有水$\frac{1}{2}$。

进水、排水交替进行，相当于轮流工作问题。

一个循环中的排水量为$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=\frac{2}{15}$;

$\frac{1}{2}\div\frac{2}{15}$的整数部分为 3,说明 3 个循环.即 6 小时后，水池还剩$\frac{1}{2}-\frac{2}{15}\times 3=\frac{1}{10}$的水。

再过 1 小时,进水，水池里的水为$\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$。

把这些水排完需要$\frac{3}{10}\div\frac{1}{3}=\frac{9}{10}$小时，所以共需 6+1+$\frac{9}{10}$=$7\frac{9}{10}$小时=7 小时 54 分。

4. 【答案】D。

【解析】设每人每天干活 1 个单位，则工作总量为 20×15=300 个单位，动工 3 天，完成 20×3=60 个单位，还剩 300-60=240 个单位，抽出 5 个人后，每天能完成(20-5)个单位，则剩余的工作还需 240÷(20-5)=16 天，所以一共用了 16+3=19 天。

快解:设每人每天干活 1 个单位，题意可以理解为 15 人干活需要干满 20 天。因为有 5 个人另干了 3 天，即相当于 15 个人干了一天的活，所以 15 人只需干活 20-1=19 天。

5. 【答案】A。

6. 【答案】B。

【解析】设工程总量为 180，则甲、乙、丙的效率分别为 12、10、15，合作 1 轮可完成的工作量为 12+10+15=37，合作 4 轮（12 天）可完成的工作量为 148，剩余 32，不足一轮。甲工作一天后还剩 32-12=20，乙再工作一天后还剩 20-10=10，此时丙还需要 10÷15=$\frac{2}{3}$（天）。所以总共需要 12+1+1+$\frac{2}{3}$=$14\frac{2}{3}$（天），选择 B。

7. 【答案】C。

【解析】设工作量为 1，依题意，有

甲+乙=$\frac{1}{36}$　　①

甲+丙=$\frac{1}{60}$　　②

乙+丙=$\frac{1}{45}$　　③

（式子中甲、乙、丙代表其工作效率）

①+②+③，可得 2(甲+乙+丙)= $\frac{1}{15}$，所以，甲+乙+丙=,30，即甲、乙、丙的工作效率之和为$\frac{1}{30}$。即甲、乙、丙合作需要 30 天。

8. 【答案】D。

【解析】假设 1 个工人每月工作量为 1，那么总工作量为 1×180×12，4 个月可以完成 1×180×4，还剩 1×180×8 的工作量，本来还有 8 个月，但要求 6 个月内完成，每个月需要完成 1×180×8÷6=240，则需要 240 名工人，比原来增加 60 名。选择 D。

9. 【答案】B。

【解析】两人合作完成工程，先找出两人的工作效率之和。

小张每小时完成全部稿件的$\frac{1}{3}\div 5=\frac{1}{15}$

小李每小时完成全部稿件的$\frac{1}{4}\div 3=\frac{1}{12}$　　　　工作效率和为$\frac{1}{15}+\frac{1}{12}=\frac{3}{20}$

所以两人合作需要 $1\div\frac{3}{20}=\frac{20}{3}$小时。

10. 【答案】B。

【解析】总任务看作已知量，设为 1。

甲完成$\frac{1}{5}$→乙完成 $1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

乙工作时间=16 天→　　　乙的工作效率=$\frac{4}{5}\div16=\frac{1}{20}$

甲、乙工作效率之和=$\frac{1}{15}$

甲的工作效率=$\frac{1}{15}-\frac{1}{20}=\frac{1}{60}$

则甲工作了$\frac{1}{5}\div\frac{1}{60}$=12 天，甲比乙少做 16-12=4 天。

11. 【答案】A。

【解析】假设小张效率是 a，小王是 b。小张效率提高 20%，前后工作时间比是 9:10。总工作量一定，工作时间与工作效率之和成反比，因此总工作效率之比为 10：9。即 (a+b):[(1+20%)a+b]=10:9，可得 0.8=b。

小王效率降低 25% ，前后总工作效率之比为 (a+b):(a+0.75b)=(a+0.8a):(a+0.75×0.8a)=9:8，则前后时间之比为 8:9，差 1 份对应 2.5 小时，所以规定时间是 2.5×8=20 小时。

12. 【答案】A。

【解析】分析题意可知，张师傅做甲工程的效率较高，李师傅做乙工程的效率较高，因此李师傅做乙工程，张师傅先用 6 天完成甲工程，之后与李师傅一同完成乙工程，这样所需的天数放少。

李师傅 6 天完成乙工程 $6\times\frac{1}{24}=\frac{1}{4}$，余下的张师傅与李师傅一起合作需要 $(1-\frac{1}{4})\div(\frac{1}{30}+\frac{1}{24})$=10 天，即完成两项工程最少需要 6+10=16 天。

13. 【答案】C。

【解析】题干说的是同时搬完，因此可整体考虑，搬完两个仓库的工作量为 2，甲、乙、丙搬完两个仓库共用 2÷($\frac{1}{10}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}$)=8 小时。在这 8 小时中，乙完成了$\frac{1}{12}$×8=$\frac{2}{3}$的工作量，剩余$\frac{1}{3}$的工作量由丙帮乙完成，即丙帮乙搬运了$\frac{1}{3}\div\frac{1}{15}$=5 小时。

14. 【答案】D。

【解析】依题意，“甲乙”轮流方式完成时所用的天数为奇数，否则不论“甲乙”还是“乙甲”，两种轮流方式所用天数必定相同。两种轮流方式的情况可表示如下:

甲乙，甲乙……甲乙，｜｜甲

乙甲，乙甲……乙甲，｜｜乙剩 60 个

虚线左边做的天数为偶数，从虚线右边可看出，剩下的 60 个零件是甲、乙工作效率之差。

因此乙每天做的个数为:60+(5-3)×3=90 个。

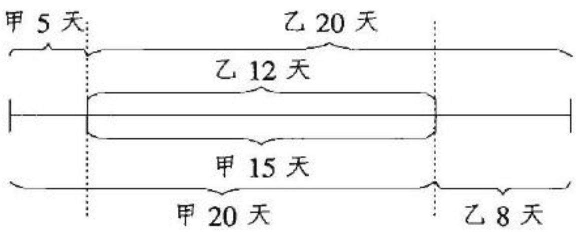
15. 【答案】C。

【解析】设水池的容量为 1。则甲、乙每分钟分别注入$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{10}$，排水管每分钟排水$\frac{1}{6}$。设排水管打开的时间为 x 分钟.则有($\frac{1}{5}$-$\frac{1}{6}$)x+($\frac{1}{5}$+$\frac{1}{10}$)x=$\frac{1}{4}$，解得 x=$\frac{3}{4}$。

注满水池，还需要(1-$\frac{1}{4}$)÷($\frac{1}{5}$+$\frac{1}{10}$)= $\frac{10}{4}$分钟。则前后一共花了$\frac{3}{4}$×2+$\frac{10}{4}$=4 分钟。

16. 【答案】D。

【解析】题干没有直接给出工作效率，为求出甲、乙的工作效率，我们先画出示意图:




从图可看出，甲 15 天的工作量和乙 12 天的工作量相等，即甲 5 天的工作量等于乙 4 天的工作最。于是可用“乙工作 4 天”等量替换题中“甲工作 5 天”这一条件，通过此替换可知乙单独做这一工程需要 20+4=24 天完成，即乙的工作效率是$\frac{1}{24}$。同理可得，甲单独做需要 30 天，那么甲、乙合作完成这一工程需要的时间为 1÷($\frac{1}{24}$+$\frac{1}{30}$)=$13\frac{1}{3}$天。

17. 【答案】C。

【解析】开始时甲队拿到 8400-5040=3360 元，甲、乙的工资比等于甲、乙的工作效率之比，即为 3360:5040=2:3；甲提高工效后，甲、乙总的工资即工效比为(3360+960):(5040-960)=18:17。设甲开始时的工效为“2”，那么乙的工效为“3”，则提高工效后甲的工效为 2×(1+1)=4。设甲在提高工效后还需 x 天才能完成任务，有(2×4+4x):(3×4+3x)=18:17，化简为 216+54x=136+68x，解得 x=$\frac{40}{7}$。工程总量为(2+3)×4+(4+3)× $\frac{40}{7}$=60，所以原计划 60÷(2+3)=12 天完成。

18. 【答案】B。

【解析】按同一顺序轮流工作问题，不同的是每换一次，工作时间改变。

根据题意，可知总时间介于 30 和 50 小时之间 设甲乙一时了 x 次，则一共有 $1+2+3+\cdots+x=\frac{(1+x)x}{2}$，由 $30<\frac{(1+x)x}{2}<50$，可知 x≥8，即甲乙各做了超过 4 次。

设甲、乙各做四次.完成的工作量分别为$\frac{1+3+5+7}{50}=\frac{16}{50}$，$\frac{2+4+6+8}{30}=\frac{20}{30}$，

此时剩下的工作量为 $1-(\frac{16}{50}+\frac{20}{30})=\frac{1}{75}$。还需甲做$\frac{1}{75}\div\frac{1}{50}=\frac{2}{3}$小时，所以共需 $(1+3+5+7)+(2+4+6+8)+\frac{2}{3}=36\frac{2}{3}$小时。

19.　　【答案】D。

【解析】设甲工地的工作量为 1.5，则乙工地的工作量为 1。

| | 甲 | 乙 |
|---|---|---|
| 上午 | $\frac{3}{1+3}=\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{1+3}=\frac{3}{4}$ |
| 下午 | $\frac{7}{12}$ | $1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$ |

于是甲工地一整天平均用了这批工人的$(\frac{3}{4}+\frac{7}{12})\div2=\frac{2}{3}$，乙工地一整天平均用了这批工人的 $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$。这批工人的$\frac{2}{3}$完成了 1.5 的工作量，那么这批工人的$\frac{1}{3}$完成 1.5÷2=0.75 的工作量，于是乙工地还剩下 1-0.75=0.25 的工作量，这 0.25 的工作量需要 4 人工作 1 天。而甲、乙工地的工作总量为 1.5+1=2.5，那么需 2.5÷0.25×4=40 人工作 1 天。所以原来这批工人共有 40-4=36 人。

20.　　【答案】B。

【解析】此题题目要求后来的时间，需找出工作量、后来的工作效率。设原来的工作效率为 1,则提高后效率为 1+1/4=5/4。

工程不变，即工作量一定。根据结论 1“工作量一定时，工作时间与工作效率成反比”可知，工程的时间将变为原来的 4/5，完成这项工程的时间将由原来的 10 小时缩短为 10×4/5=8 小时。

21.　　【答案】B。

【解析】要求甲单独做需要多少时间，已知工作总量为 1，则需求出甲的工作效率。

甲、乙两人合作 6 小时，完成全部工作的$\frac{2}{5}$→甲乙合作后的效率和为$\frac{2}{5}\div6=\frac{1}{15}$;

乙单独工作 6 小时，完成 $1-\frac{2}{5}=\frac{13}{30}$→乙的工作效率为$(1-\frac{2}{5}-\frac{13}{30})\div6=\frac{1}{36}$，则合作后的乙的工作效率为$\frac{1}{36}\times(1+\frac{1}{5})=\frac{1}{30}$。

甲的工作效率是$(\frac{1}{15}-\frac{1}{30})\div(1+\frac{1}{10})=\frac{1}{33}$,所以单独由甲做需要 $1\div\frac{1}{33}=33$ 小时。

22.　　【答案】D。

【解析】总天数一定，要使两人合做的天数在总天数中占的尽量少，只能由工作效率较高的甲单独做一部分，甲、乙两人合做每天可完成工程的$\frac{1}{12}\times(1-\frac{1}{3})+\frac{1}{18}\times(1-\frac{1}{4})=\frac{7}{72}$。

若 11 天全部由甲独做，11 天后未完成 $1-\frac{1}{12}\times11=\frac{1}{12}$工作量。每合作一天可多做$\frac{7}{72}-\frac{1}{12}=\frac{1}{72}$的工作量，因此差的$\frac{1}{12}$工作量至少需要合作$\frac{1}{12}\div\frac{1}{72}=6$ 天来弥补。

# 第 09 讲　行程问题

## 课前导学

行程问题是一类研究三量关系的经典题型，其变化类型很多，但无论是“一个物体的运动”还是 “两个物体的运动”；不管是“相向运动”、“同向运动”，还是“相背运动”，反映的数量关系都是围绕路程、速度和时间这三个量的。

行程问题的核心公式为路程=速度×时间，当然这三个量必须是相互对应的。在简单行程问题中，通常不涉及复杂的运动过程或数据关系，可直接根据核心公式求解。

1.一辆汽车从 A 地开到 B 地需要一个小时，返回时速度为每小时 75 公里，比去时节约了 20 分钟，问 AB 两地相距多少公里？

A.30　　B.50　　C.60　　D.75

【解析】根据路程=速度×时间来求解。

时间：返回时用了 60-20=40 分钟=$\frac{2}{3}$小时。速度：75 公里/小时。

所以 AB 两地相距 75×$\frac{2}{3}$=50 公里。

2.某人要到 60 千米外的农场去，开始他以 5 千米/小时的速度步行，后来有辆速度 18 千米/小时的拖拉机把他送到了农场，总共用了 5.5 小时，问他步行了多远？（　　）

A. 15 千米　　B. 20 千米　　C.25 千米　　D.30 千米

【解析】复杂行程问题，采用代入法。A 为正确答案。

3.小王步行的速度比跑步慢 50%，跑步的速度比骑车慢 50%。如果他骑车从 A 城去 B 城，再步行返回 A 城共需要 2 小时。问小王跑步从 A 城到 B 城需要多少分钟？

A.45　　B.48　　C.56　　D.60

【解析】路程相等，时间比等于速度的反比。因此，小王从 A 地到 B 地，步行时间是跑步时间的 2 倍， 跑步时间是骑车时间的 2 倍。设从 A 地到 B 地骑车时间为 t，则跑步时间为 2t，步行时间为 4t，由题意可得，t+4t=2，t=0.4 小时，则跑步时间 2t=0.8 小时=48 分钟。

4.A、B 两山村之间的路不是上坡就是下坡，相距 60 千米。邮递员骑车从 A 村到 B 村，用了 3.5 小时；再沿原路返回，用了 4.5 小时。已知上坡时邮递员车速是 12 千米/小时，则下坡时邮递员的车速是（　　）千米/小时。

A.10　　B.12　　C.14　　D.20

【解析】回来时的上坡是去时的下坡，下坡是去时的上坡。因此对往返的全程来说，上、下坡的路程均为 60 千米。全程总用时 3.5+4.5=8 小时，其中上坡用时 60÷12=5 小时，下坡用时 8-5=3 小时。故下坡速度为 60÷3=20 千米/小时，选 D。

5.甲、乙两辆清洁车执行东、西城间的公路清扫任务。甲车单独清扫需要 6 小时，乙 车单独清扫需要 9 小时，两车同时从东、西城相向开出，相遇时甲车比乙车多清扫 15 千米。问东、西两城相距多少千米？

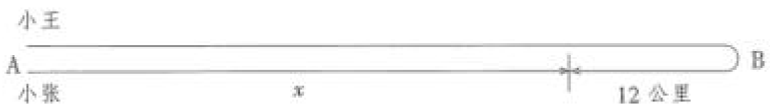
A.60　　B.75　　C.90　　D.135

【解析】同一时间内甲车每小时走全程的$\frac{1}{6}$，乙车每小时走全程的$\frac{1}{9}$。时间一定，路程与速度成正比，甲、乙走的路程比为 9:6=3:2。相遇路程为甲、乙各自走的路程和。设总路程为 5 份，甲走了 3 份，乙走了 2 份，甲比乙多走 1 份，这一份是 15 千米。故总路程为 15×5=75 千米，选 B。

6.小张和小王同时骑摩托车从 A 地向 B 地出发，小张的车速是每小时 40 公里，小王的车速是每小时 48 公里。小王到达 B 地后立即向回返，又骑了 15 分钟后与小张相遇。那么 A 地与 B 地之间的距离是多少公里？

A.144　　B.136　　C.132　　D.128

【解析】根据时间一定，路程与速度成正比可知，小王与小张路程比为 48:40=6:5。由下图所示，小王到达 B 地后往回骑了$\frac{15}{60}$×48=12 公里，则小王比小张多走 12×2=24 公里。设小张走的路程为 x，则小王为 x+24；$\frac{x+24}{x}=\frac{6}{5}$，解得 x=120。所以 AB 距离为 120+12=132 公里，选 C。




7. 一对父子在操场上跑步晨练，儿子跑三步的时间父亲跑两步，父亲跑一步的距离是儿子一步的两倍，儿子跑出 100 步后父亲开始追，当父亲追上儿子时，儿子共跑了多少步？

A. 200　　B. 300　　C. 400　　D. 500

**【解析】**儿子和父亲的速度之比为$\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$。设儿子的速度为 3，则父亲的速度为 4。父亲追上儿子需要的时间为 100÷(4-3)=100，则儿子共跑了 100×3+100=400 步。

8. A 和 B 两个码头分别位于一条河的上下游，甲船从 A 码头到 B 码头需要 4 天，从 B 码头返回 A 码头需要 6 天，乙船在静水中的速度是甲船的一半。问：乙船从 B 码头到 A 码头需要（　　）天。

A. 6　　B. 7　　C. 12　　D. 16

【解析】甲船从 A 码头到 B 码头所花时间少于从 B 码头返回 A 码头，说明从 A 码头到 B 码头为顺水，从 B 码头到 A 码头为逆水。设 A、B 距离为 24，则甲船速为（$\frac{24}{4}+\frac{24}{6}$）÷2=5，乙船速为$\frac{5}{2}$；水速为（$\frac{24}{4}-\frac{24}{6}$）÷2=1。乙船从 B 到 A 在逆水中航行的速度为$\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}$，$24\div\frac{3}{2}=16$，选 D。

**(一)距离＝速度×时间**

**(二)火车过桥洞计算公式：**时间＝（火车长度＋桥洞长度）÷火车速度

**(三)比例原则**

行程基本比例：$\frac{S_{甲}}{S_{乙}}=\frac{v_{甲}}{v_{乙}}$

1.时间相同，则路程与速度成正比；2.速度相同，则路程与时间成正比；

3.路程相同，则时间与速度成反比。

1. 某快速反应部队运送救灾物资到灾区。飞机原计划每分钟飞行12千米，由于灾情危急，飞行速度提高到每分钟15千米，结果比原计划提前30分钟到达灾区，则机场到灾区的距离是（　　）千米。

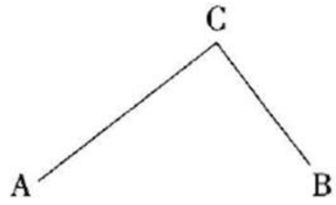
A.1600　　B.1800　　C.2050　　D.2250

2. 某公路铁路两用桥，一列动车和一辆轿车均保持匀速行驶，动车过桥只需35秒，而轿车过桥的时间是动车的3倍，已知该动车的速度是每秒70米，轿车的速度是每秒21米，这列动车的车身长是（　　）。（轿车车身长忽略不计）

A. 120米　　B. 122.5米　　C. 240米　　D. 245米

3. 游乐场的溜冰滑道如图所示，溜冰车上坡时每分钟行驶400米，下坡时每分钟行驶600米，已知溜冰车从A点到B点需要3.7分钟，从B点到A点只需要2.5分钟，则AC比BC长多少米?(　　)

A.1200　　B.1440　　C.1600　　D.1800




**(四)相遇追及、流水行程问题核心公式**

**1.合成速度=速度1±速度2**

速度取和：相遇和背离、顺风、顺水、顺电梯、队头到队尾

相遇基本公式：相遇距离＝（大速度＋小速度）×相遇时间

背离基本公式：背离距离＝（大速度＋小速度）×背离时间

速度取差：追及、逆风、逆水、逆电梯、队尾到队头

追及基本公式：追及距离＝（大速度-小速度）×追及时间

**2.流水行船问题基本公式**

船速（静水速）+水速＝顺水速；船速（静水速）－水速＝逆水速

船速（静水速）$=\frac{顺水速+逆水速}{2}$ ；水速$=\frac{顺水速-逆水速}{2}$

4. 自动扶梯以匀速自下向上行驶，甲每秒钟向上走1级梯，乙每秒钟向上走2级梯，结果甲30秒到达梯顶，乙20秒到达梯顶，该扶梯共有（　　）级。

A.40　　B.60　　C.80　　D.100

5. 一条单线铁路全长500千米，每隔25千米有一个车站，甲、乙两列火车同时从两端出发，甲车每小时行135千米，乙车每小时行驶65千米，为保证快车正点运行，慢车应给快车让路，为使等候的时间尽量短，乙车应在出发后第（　　）个车站等候甲车通过。

A.5　　B.6　　C.7　　D.10

6. 小胖步行上学，每分钟行72米。一次小胖离家512米后，爸爸发现小胖的文具盒忘在家中，爸爸带着文具盒，立即骑自行车以每分钟200米的速度去追小胖。问爸爸出发几分钟后在途中追上小胖?(　　)

A.2　　B.3　　C.4　　D.5

7. 姐弟俩出游，弟弟先走一步，每分钟走40米，走80米后姐姐去追他。姐姐每分钟走60 米，姐姐带的小狗每分钟跑150米。小狗追上弟弟又转去找姐姐，碰上姐姐又转去追弟弟，这样跑来跑去，直到姐弟相遇小狗才停下来。问小狗共跑了多少米?（　　）

A.600　　B.800　　C.1200　　D.1600

8. 红星小学组织学生排成队步行去郊游，每分钟步行60米，队尾的王老师以每分钟步行150米的速度赶到排头，然后立即返回队尾，共用10分钟。求队伍的长度？(　　)

A.630米　　B.750米　　C.900米　　D.1500 米

9. 英雄骑马射箭，路遇猛虎，相距50米，适逢箭矢已尽，遂驱汗血宝马逐之，意欲生擒。今知宝马步幅较猛虎为大，宝马2步值猛虎3步，然猛虎动作较宝马迅捷，宝马奔跑3步之时猛虎已经狂奔4步，则英雄追上猛虎之时，汗血宝马跑了（　　）米。

A.320　　B.360　　C.420　　D.450

10.　　甲、乙二人同时从A地去B地，甲每分钟行60米，乙每分钟行90米，乙到达B地后立即返回，并与甲相遇。相遇时，甲还需行3分钟才能到达B地，问A，B两地相距多少米？

A.1350 米　　B.1080 米　　C.900 米　　D.720 米

11.　　甲、乙二人上午8点同时从东村骑车到西村去，甲每小时比乙多骑6千米，中午12点甲到达西村后立即返回东村，在距西村15千米处遇到乙。东、西两村相距多远？（　　）

A.30　　B.40　　C.60　　D.80

12.　　一艘游轮逆流而行，从A地到B地需6天；顺流而行，从B地到A地需4天。问若不考虑其他因素，一块塑料漂浮物从B地漂流到A地需要多少天?(　　)

A.12天　　B.16天　　C.18天　　D.24天

漂流所需时间=　　　　　　　（其中$t_2$和$t_1$分别代表船顺流所需时间和逆流所需时间）

13.　AB两城由一条河流相连，轮船匀速前进，从A城到B城需行3天时间，而从B城到A城需行4天，从B城放一个无动力的木筏，它漂到A城需多少天？(　　)

A.3天　　B.21天　　C.24天　　D.无法自己漂到

**(五)双人运动**

**1.双人环形运动**

第N次**迎面相遇**时，**路程和**为N个全程（**反向运动**）

第N次**背后追上**时，**路程差**为N个全程（**同向运动**）

**2.双人两端往返运动**

第N次**迎面相遇**时，**路程和**为**2N-1**（奇数列）个全程

第N次**追上相遇**时，**路程差**为**2N-1**（奇数列）个全程

14.　甲乙两人从运动场同一起点同时同向出发，甲跑的速度为200米/分钟，乙步行，当甲第5次超越乙时，乙正好走完第三圈，再过1分钟时，甲在乙前方多少米？（　　）

A.105　B.115　C.120　D.125

15.　A大学的小李和B大学的小孙分别从自己学校同时出发，不断往返于A、B两校之间。现已知小李的速度为85米/分钟，小孙的速度为105米/分钟，且经过12分钟后两人第二次相遇。问A、B两校相距多少米？（　　）

A.1140　B.980　C.840　D.760

**课后真题练习：**

1. 小张和小王同时骑摩托车从A地向B地出发，小张的车速是每小时40公里，小王车速是48公里。小王到达B地后立即向回返，又骑了15分钟后与小张相遇。那么A地与B地之间的距离是多少公里？（　　）

A.142　　B.136　　C.132　　D.128

2. 某轮船计划用15小时从A地到B地，行驶5小时后，由于天气变好，速度加快了25%，可提前几小时到达?(　　)

A.4　　B.3　　C.2　　D.1

3. 一只渔船在静水中每小时航行4千米，逆水4小时航行12千米。则顺水时每小时航行多少千米？(　　)

A.5　　B.6　　C7　　D.8

4. 上午8时8分，小明骑自行车从家里出发。8分钟后，爸爸骑摩托车去追他，在离家4千米的地方追上了他，然后爸爸立即回家。到家后又立刻回头去追小明。再追上他的时候，离家恰是8千米。这时是几时几分？（　　）

A. 8 点 30 分　　B. 8 点 32 分　　C. 8 点 40 分　　D. 8 点 48 分

5. 当甲在60米赛跑中冲过终点线时，比乙领先10米，比丙领先20米。如果乙和丙按原来的速度继续冲向终点，那么当乙到达终点时将比丙领先多少米？（　　）

A. 15　　B. 12　　C. 10　　D. 20

6. 小王从甲地出发去乙地。前12公里小王每小时步行4公里，后6公里每小时步行3公里。问小王从甲地到乙地平均每小时步行几公里？（　　）

A. 3.5　　B. 3.6　　C. 3　　D. 4

7. 两个口岸A、B沿河道的距离为360千米。甲船由A到B上行需要10小时，下行由B到A需要5小时，若乙船由A到B上行需要15小时，那么下行由B到A需要多少小时？（　　）

A. 7　　B. 6　　C. 5　　D. 4

8. 甲以6千米/小时步行从A地往B地，在甲出发90分钟时，乙发现甲落下重要物品， 立即骑自行车以12千米/小时追甲，在11点追上，甲出发为时间为上午（　　）点。

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

9. 有一行人和一骑车人都从A向B地前进，速度分别是行人3.6千米/小时，骑车人为10.8千米/小时，此时道路旁有列火车也由A地向B地疾驶，火车用22秒超越行人，用26秒超越骑车人，这列火车车身长度为（ ）米。

A. 232　　B. 286　　C. 308　　D. 1029.6

10. 某环形公路长15千米，甲、乙两人同时同地沿公路骑自行车反向而行，0.5小时后相 遇，若他们同时同地同向而行，经过3小时后，甲追上乙。问乙的速度是多少？（ ）

A. 12.5 千米/小时　　B. 13.5 千米/小时

C. 15.5 千米/小时　　D. 17.5 千米/小时

11. 甲、乙两人在环湖小路上匀速行驶，且绕行方向不变，19时，甲从A点，乙从B点同 时出发相向而行，19时25分，两人相遇；19时45分，甲到达B点；20点5分，两人再次相遇。乙环湖一周需要多长时 间？（ ）

A. 72 分钟　　B. 81 分钟　　C. 90 分钟　　D. 100 分钟

12. A和B两个码头分别位于一条河的上下游，甲船从A码头到B码头需要4天，从B码头 返回A码头需要6天；乙船在静水中速度是甲船的一半。乙船从B码头到A码头需要（ ）天。

A.6　　B.7　　C.12　　D.16

13. 一只小船从甲港到乙港逆流航行需2小时，水流速度增加一倍后，再从甲港到乙港逆流航行需3小 时，水流速度增加后，从乙港返回甲港需航行（ ）。

A. 0.5 小时　　B. 1 小时　　C. 1.2 小时　　D. 1.5 小时

14. 一支部队排成长度为800米的队列行军，速度为80米/分钟，在队首通讯员以3倍于行军的速度跑步到队尾，花1分钟传达首长命令后，立即以同样的速度跑回队首，在其往返过程中通讯员共花费的时间为（ ）。

A. 7.5 分钟　　B. 8 分钟　　C. 8.5 分钟　　D. 10 分钟

15. 甲、乙两人在长30米的泳池内游泳，甲每分钟游37.5米，乙每分钟游52.5米。两人同 时分别从泳池的两端出发，触壁后原路返回，如是往返。如果不计转向的时间，则从出发开始计算的1分50秒内两人 共相遇多少次？（ ）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

# 精选真题练习参考答案

1. 【答案】C。

【解析】假设 A、B 两地之间距离为 S，小王到达 B 地用时为 t，15 分钟=0.25 小时，则$\begin{cases} s=48\times t \\ 2s=(40+48)\times(t+0.25) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t=2.75 \\ s=132 \end{cases}$

注：两人相遇时，一共走了 2 个全程，这是本题的关键。

2. 【答案】C。

【解析】原速度：新速度=1：（1+25%）=4：5。路程一定，时间与速度成反比。

$\frac{余下路程实际用时}{余下路程计划用时}=\frac{x}{15-5}=\frac{4}{5}$

解得 x=8，故变速后实际用时 8 小时，可提前 10-8=2 小时到达。

3. 【答案】A。

【解析】船在逆水中的速度是 12÷4=3 千米/小时，根据逆水速度=船速-水速，可知水速=船速-逆水速度，即 4-3=1 千米/小时。根据顺水速度=船速+水速，则有顺水速度=4+1=5 千米/小时。

4. 【答案】B。

【解析】从爸爸第一次追上小明到第二次追上小明，父子两用的时间是相同的，在这段时间内：小明从离家 4 千米的地方走到离家 8 千米的地方，走了 8-4=4 千米。爸爸从离家 4 千米的地方返回家中，再走到离家 8 千米的地方，走了 4+8=12 千米。所以，爸爸的速度是小明速度的 3 倍（爸爸速度比小明快 2 倍），小明走 4 千米用的时间是爸爸的 3 倍。

爸爸从家出发第一次追上小明：小明用时比爸爸快 8 分钟，所以爸爸的用时是 8/2=4 分钟，小明走 4 千米用时是 8+4=12 千米。小明速度为 4/12=1/3（千米/分钟），爸爸的速度为 4/4=1（千米/分钟）。

自小明出发到第二次被爸爸追上，小明共走了 8 千米，用时是 8（1/3）=24 分钟。

上午 8 时 8 分加上 24 分钟，就是上午 8 时 32 分。

5. 【答案】B。

【解析】甲冲过终点线时，乙跑了 50 米，丙跑了 40 米，如果乙和丙按原来的速度继续冲向终点的话，则丙的速度是乙的速度的$\frac{40}{50}=\frac{4}{5}$，故当乙到达终点时丙离终点线还有 $60-60\times\frac{4}{5}=12$ 米，故选 B。

6. 【答案】B。

【解析】平均速度＝总路程÷总时间。小王步行的总路程为：12＋6＝18(公里)；前 12 公里小王步行所用时间为：12÷4＝3(小时)，后 6 公里小王步行所用时间为：6÷3＝2(小时)，则小王步行的总时间为 5 小时，则小王从甲地步行到乙地的平均速度为：18÷5＝3.6(公里/小时)，从而选 B。

7. 【答案】B。

【解析】典型的顺逆水问题。甲船上行的速度为：360÷10＝36 千米/小时；甲船下行的速度为：360÷5＝72 千米/小时；由于 2 倍的水流的速度＝船顺流的速度－船逆流的速

度，故水流的速度为（72－36）÷2＝18 千米/小时。而乙船上行的速度为：360÷15＝24 千米/小时；乙船在静水中的速度为：24＋18＝42 千米/小时，于是乙船下行的速度为：360÷（42＋18）＝6 小时，故选 B。

8. 【答案】B。

【解析】甲出发了 1.5 小时，已经走了 6×1.5=9（千米），所以追及时间为 9÷（12-6）=1.5（小 时），那么甲一共走了 1.5+1.5=3（小时），说明出发时间是 8 点，选择 B。

9. 【答案】B。

【解析】3.6 千米/小时=1 米/秒，10.8 千米/小时=3 米/秒。设火车的速度为 v 米/秒，长度为 s 米，则：$\begin{cases} s = 22 \times (v-1) \\ s = 26 \times (v-3) \end{cases}$，求得 v=14，s=286，答案选 B。

10. 【答案】A。

【解析】假设甲、乙速度分别为 u、v，则：$\begin{cases} 15 = (u+v) \times 0.5 \\ 15 = (u-v) \times 3) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = 17.5 \\ v = 12.5 \end{cases}$

11. 【答案】C。

【解析】假设甲、乙速度分别为 u、v，两人出发时正面的距离是 $S_1$，背面的距离为 $S_2$，那么整圈距 离就应该是 $S_1+S_2$。因为出发 25 分钟后，他们相遇：$S_1$=25×（u+v）。从出发后 45 分钟时，甲从 A 点到 达 B 点：$S_1$=45×u。两次相遇间隔为 40 分钟：$S_1+S_2$=40×（u+v）。根据前两个方程，我们可以得到：20u=25v，代入 到第三个方程，消掉 u，得到：$S_1+S_2$=90v，说明乙单独一圈需要 90 分钟，选择 C。

12. 【答案】D。

【解析】假设 AB 码头相距 24，设甲船、乙船静水速度分别是 u、$\frac{u}{2}$，水速为 v，所求时间为 T，根据题意：$\begin{cases} 24 = 4 \times (u+v) \\ 24 = 6 \times (u-v) \\ 24 = T \times \left(\frac{u}{2} - v\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = 5 \\ v = 1 \\ T = 16 \end{cases}$，选择 D。

13. 【答案】B。

【解析】假设两港距离为 6，小船静水速度为 u，原水速为 v，所求时间为 t，则：

$$\begin{cases} 6 = 2 \times (u-v) \\ 6 = 3 \times (u-2v) \\ 6 = t \times (u+2v) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = 4 \\ v = 1 \\ t = 1 \end{cases}$$

14. 【答案】C。

【解析】通讯员速度：80×3=240（米/分钟）。总时间为$\frac{800}{240+80}$+1+$\frac{800}{240-80}$ =8.5（分钟）。

15. 【答案】B。

【解析】1 分 50 秒=$\frac{11}{6}$分。迎面相遇：30×（2N-1）≤路程和=（37.5+52.5）×$\frac{11}{6}$，得 N≤3.25，共 3 次。追上相遇：30×（2N-1）≤路程差=（52.5-37.5）×$\frac{11}{6}$,得到 N≤$\frac{23}{24}$，共 0 次。因此，一共相遇 3 次。

# 第 10 讲　牛吃草问题

**课前导学**

1.牛吃草问题可看成牛追草的过程，草地原有的草就是牛和草之间的距离，牛吃草的速度>草生长的速度，牛和草之间的距离不断缩小，即原有的草不断减少，直到追上即牛把草吃光为止。

2.如果牛吃草的速度=草生长的速度，那么牛和草之间的距离维持不变，即草永远吃不完。

3.重要识别特征，当看到“若用12个注水管注水，9小时可注满水池，若用9个注水管，24小时可注满水，现在用8个注水管注水，那么可用多少小时注满水池？”等**类似排比句**的出现时，就是牛吃草问题；

4.因为我们不知道牛吃草的速度，不妨假设每头牛每单位时间吃草的量是“1”，牛的数量也就是这些牛每单位时间吃草的量。

**原有草量=（牛数-草长速度）×时间，注意牛吃草速度“1”及变量X的变化形式。**

**通用公式：**N=（Y-x）×T

1.“N”代表原有存量（比如“原有草量”）；

2.“Y”代表促使原有存量减少的变量（比如“牛数”）；

3.“x”代表存量的自然增长速度（比如“草长速度”）；

4.“T”代表存量完全消失所耗用时间。

真题 1.一片草地长满青草，27 头牛 6 天可以吃完，或者 23 头牛 9 天可以吃完。若是 21 头牛，要几天才可以吃完？

A.10　　B.11　　C.12　　D.13

【解析】设原有草量为 N，需要 T 天吃完，草长速度为 x,则

$N=(27-x)\times 6=(23-x)\times 9=(21-x)\times T$

解得：x=15，N=72，T=12

正确答案是：C

1. 有一块牧场，草均匀生长，可供 10 头牛吃 20 天，15 头牛吃 10 天，则它可供多少头牛吃 4 天？（　　）

A.20　　B.25　　C.30　　D.35

2. 某招聘会在入场前若干分钟就开始排队，每分钟来的求职人数一样多，从开始入场到等候入场的队伍消失，同时开 4 个入口需 30 分钟，同时开 5 个入口需 20 分钟。如果同时打开 6 个入口，需多少分钟？（　　）

A.8　　B.10　　C.12　　D.15

3. 某河段中的沉积河沙可供 80 人连续开采 6 个月或 60 人连续开采 10 个月。如果要保证该河段河沙不被开采枯竭，问最多可供多少人进行连续不间断的开采？（假定该河段河沙沉积的速度相对稳定）（　　）

A. 25　　B.30　　C.35　　D.40

4. 有一块草地，每天草生长的速度相同。现在这片牧草可供 16 头牛吃 20 天，或者供 80 只羊 12 天。如果一头牛一天的吃草量相当于 4 只羊一天的吃草量，那么这片草地可供 10 头牛和 60 只羊一起吃多少天？（　　）

A.6 天　　B.8 天　　C.12 天　　D.15 天

5. 天气变冷，牧场上草以每天均匀速度减少。经计算，牧场草可供 20 头牛吃 5 天，或者 16 头牛吃 6 天。那么可供 11 头牛吃几天？（　　）

A.12　　B.10　　C.8　　D.6

6. 有一水池，在某次大雨后灌满了一池水，水在池底以均匀的速度渗入深层地下水。如果想把水池的水抽干，8 台抽水机需要 3 小时，5 台抽水机需要 4 小时。如果想在 6 小时之内抽干水，至少需要多少台抽水机？（　　）

A.4　　B.3　　C.2　　D.1

7. 在春运高峰时，某客运中心售票大厅站满等待买票的旅客，为保证售票大厅的旅客安全，大厅入口处旅客排队以等速度进入大厅按次序等待买票，买好票的旅客及时离开大厅。按照这种安排，如果开 10 个售票窗口，5 小时可使大厅内所有旅客买到票；如果开 12 个售票窗口，3 小时可使大厅内所有旅客买到票，假设每个窗口售票速度相同。由于售票大厅入口处旅客速度增加到原速度的 1.5 倍，为了在 2 小时内使大厅中所有旅客买到票，按这样的安排至少应开售票窗口数为多少个？（　　）

A.15　　B.16　　C.18　　D.19

8. 一个水库在年降水量不变的情况下，能够维持全市 12 万人 20 年的用水量。在该市新迁入 3 万人之后，该水库只够维持 15 年的用水量。市政府号召节约用水，希望能将水库的使用寿命提高到 30 年。那么，该市市民平均需要节约多少比例的水才能实现政府制定的目标？（　　）

A. 3/5　　B. 2/5　　C. 1/3　　D. 1/4

9. 有一口很深的水井，连续不断涌出泉水。使用 17 台抽水机来抽水，30 分钟可以将水井抽干。若使用 19 台抽水机，则 24 分钟就可以将水井抽干。现在有若干台抽水机在抽水，6 分钟后，撤走 4 台抽水机，再过 2 分钟后，水井被抽干。那么原来有抽水机多少台？（　　）

A. 25　　B. 30　　C. 35　　D. 40

10. 有一块牧场长满草，每天牧草匀速生长，可供 9 头牛吃 12 天，8 头牛吃 16 天，现在一开始只有 4 头牛，从第 7 天起又增加了若干头牛，再过 6 天吃完所有的草，请问增加了几头牛？（　　）

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 10

11. 有三块草地，面积分别为 5、6 和 8 公顷。草地上的草一样厚，而且长得一样快，第一块草地可供 11 头牛吃 10 天，第二块草地可供 12 头牛吃 14 天。问：第三块草地可供 19 头牛吃多少天？（　　）

A. 6　　B. 7　　C. 8　　D. 9

**提示：**如果草场有面积区别，如“M 头牛吃 W 亩草”时，Y 用________代入，此时 Y 代表单位面积上的牛数。

**课后真题练习：**

1. 一只船发现漏水时，已经进了一些水，水匀速进入船内，如果 10 人舀水，3 小时舀完；如 5 人舀水，8 小时舀完。如果要求 2 小时舀完，要安排多少人舀水？（ ）

A. 11　　B. 12　　C. 13　　D. 14

2. 一只船发现漏水时，已经进了一些水，水匀速进入船内。如果 4 个成人与 8 个少年舀水，需要 舀 8 小时；如果 7 个成人与 6 个少年舀水，需要舀 6 小时。假设 1 个成人的舀水速度相当于 2 个少年的舀水速度， 请问 10 个成人与 16 个少年需要舀水多少小时才能把水舀干净？（ ）

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

3. 假设某地森林资源的增长速度是一定的，且不受到自然灾害等影响，那么若每年开采 110 万立方米，则可采 90 年，若每年开采 90 万立方米则可开采 210 年。为了使这片森林可持续开发，则每年最多开采多少万立方米？（ ）

A. 30　　B. 50　　C. 60　　D. 75

4. 有一个蓄水池装有 9 根水管，其中一根为进水管，其余 8 根为相同的出水管，进水管以均匀的速度不停地向这个蓄水池注水。后来有人想打开出水管，使池内的水全部排光（池内已注入了一些水）；如果把 8 根出水管全部打开，需 3 小时把池内的水全部排完；如果仅打开 5 根出水管，需 6 个小时把池内的水全部排光。问要想在 4.5 小时内把池内的水全部排光，需同时打开几个出水管？（ ）

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

5. 某超市的收银台平均每小时有 30 名顾客前来排队付款，每一个收银台每小时能应付 20 名顾客付款。某天某时刻，超市如果只开设两个收银台，付款开始 1 小时就没有顾客排队了，问如果当时开设三个收银台，则付款开始多少分钟就没有顾客排队了？（ ）

A. 20　　B. 30　　C. 40　　D. 50

6. 有一个灌溉用的中转水池，一直开着进水管往里灌水，一段时间后水池便满了。此时如果用 2 台抽水机排水，则用 40 分钟能排完；如果用 4 台同样的抽水机排水，则用 16 分钟排完。请问：水池每分钟的进水量相当于水池总量的（ ）。

A. $\frac{1}{36}$　　B. $\frac{1}{64}$　　C. $\frac{1}{72}$　　D. $\frac{1}{80}$

# 精选真题练习参考答案

1. 【答案】D。

【解析】根据核心公式可得：N=（10-x）3=（5-x）8=（Y-x）2

X=2,N=24,y=14

2. 【答案】B。

【解析】根据核心公式可得：N=（8-x）8=（10-x）6=（Y-x）T

X=2,N=48,T=3

3. 【答案】D。

【解析】根据核心公式可得：N=(110-x)90=(90-x)210

X=75,N=3150

4. 【答案】B。

【解析】根据核心公式可得：N=（8-x）3=（5-x）6=（Y-x）4.5

X=2,N=18,Y=6

5. 【答案】A。

【解析】根据核心公式可得：N=（2×20-30）1=（3×20-30）T

N=80,T=$\frac{1}{3}$

6. 【答案】B。

【解析】根据核心公式可得：N=（2-x）40=（4-x）16

X=$\frac{2}{3}$,N=$\frac{160}{3}$, $\frac{X}{N}$ =$\frac{1}{80}$

# 第 11 讲　容斥原理

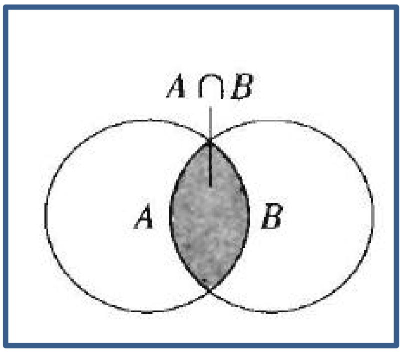
## 课前导学

容斥原理又称排容原理，主要的工作就是在计数时，排斥掉重复计算的部分，保证最后的数据结果无遗漏且无重复。解决容斥原理最好的方法是利用文氏图，清楚地分辨数据之间的关系。

**一、两个集合的容斥原理**

**（一）标准型两集合容斥原理**

如果被计数的事物有 A、B 两类，那么，先把 A、B 两个集合的元素个数相加，发现既是 A 类又是 B 类的部分重复计算了一次，要减去。如图：A∪B 表示 A 与 B 的并集（圆所覆盖的总面积）；A∩B 表示 A 与 B 的交集(阴影部分)




圆所覆盖面积=两圆面积和-重叠部分面积

A∪B=A+B-A∩B=总-外

外—不是 A 也不是 B，即都不是

例 1.某科研单位共有 68 名科研人员，其中 45 人具有硕士以上学历，30 人具有高级职称，12 人兼而有之。没有高级职称也没有硕士以上学历的科研人员是多少人？

A.13　　B.10　　C.8　　D.5

【解析】根据二集合容斥原理，具有硕士学历或高级职称的有 45+30-12=63 人，则既没有高级职称也没有硕士以上学历的科研人员有 68-63=5 人。

可转换成：

1. 现有 50 名学生都做物理、化学实验，如果物理实验做正确的有 40 人，化学实验做正确的有 31 人，两种实验都做错的有 4 人，则两种实验都做对的有多少人？（　　）

A.27 人　　B.25 人　　C.19 人　　D.10 人

2. 一个俱乐部，会下象棋的有 69 人，会下围棋的有 58 人，两种棋都不会下的有 12 人，两种棋都会下的有 30 人，问这个俱乐部一共有多少人？（　　）

A.109 人　　B.115 人　　C.127 人　　D.139 人

3. 某班有 50 位同学参加期末考试，结果英文不及格的有 15 人，数学不及格的有 19 人，英文和数学都及格的有 21 人。那么英文和数学都不及格的有（　　）人？

A.4　　B.5　　C.13　　D.17

4. 某单位派 60 名运动员参加运动会开幕式，他们着装白色或黑色上衣，黑色或蓝色裤子。其中有 12 人穿白上衣蓝裤子，有 34 人穿黑裤子，29 人穿黑上衣，那么穿黑上衣黑裤子的有多少人？（　　）

A. 12　　B. 14　　C. 15　　D. 29

**（二）图示标数型两集合容斥原理**

如果题目涉及“只满足条件 A 的数目”或者“只满足条件 B 的数目”，那么标准公式无法解答，一般选用“两集合图示标数”来完成答题。

**标数时由中间往外标。**

5. 一批游客中每人都去了 A、B 两个景点中至少一个。只去了 A 的游客和没去 A 的游客数量相当，且两者之和是两个景点都去了的人数的 3 倍。则只去一个景点的人数占游客总人数的比重为（　　）

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. $\frac{4}{5}$　　D. $\frac{5}{6}$

A、B 两个景点中至少一个—即不存在一个景点都不去，且“没去 A”等同于“只去了 B”。

设两个景点都去的为 X，则“只去 A”和“没去 A”的人数之和为 3X，因为两者相等，所以各为 1.5X。

6. 工厂组织职工参加周末公益活动，有 80％的职工报名参加。其中报名参加周六活动的人数与报名参加周日活动的人数比为 2:1，两天的活动都报名参加的人数为只报名参加周日活动的人 数的 50％。问未报名参加活动的人数是只报名参加周六活动的人数的(　　)。

A. 20％　　B. 30％　　C. 40％　　D. 50％

两天都参加的为 X，则只周日的为 2X，则参加周日的总数为 3X，参加周六与参加周日的为 2：1，则参加周六的为 6X，则只参加周六的为 5X。

共有：5X+X+2X=8X 参加活动，占总数 80%。

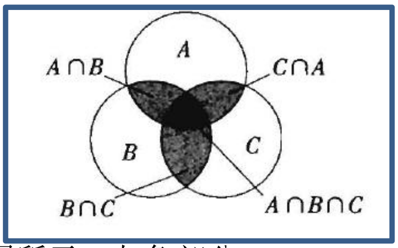
则都没参加为 20%，即 2X。　2X：5x=40%

## 二、三个集合的容斥原理

### （一）标准型三集合容斥原理

如果被计数的事物有 A、B、C 三类,如下图所示，A+B+C 后，灰色部分被重复计算一次，黑色部分被重复计算两次。减去两两的交集 A∩B、B∩C、C∩A 后，被重复计算的浅色部分被去掉，但是黑色部分又被多减了 1 次。所以最后还要再加上 A、B、C 的交集 A∩B∩C。

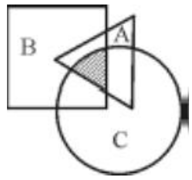
圆所覆盖面积=三圆面积和-每两个圆重叠的+三个圆重叠的




如图所示，灰色部分 A∩B-A∩B∩C、B∩C-A∩B∩C、C∩A-A∩B∩C 都被重复计算了 1 次，黑色部分 A∩B∩C 被重复计算了 2 次，因此总数 A∪B∪C=A+B+C-(A∩B-A∩B∩C)-(B∩C-A∩B∩C)-(C∩A-A∩B∩C)-2A∩B∩C=A+B+C-A∩B-B∩C-C∩A+A∩B∩C。即得到:

**标准公式：A∪B∪C=A+B+C-A∩B-B∩C-C∩A+A∩B∩C=总-外**

7. 如图所示：A、B、C 分别是面积为 60、170、150 的三张不同形状的卡片，它们部分重叠放在一起盖在桌面上，总共盖住的面积为 280，且 A 与 B、B 与 C、C 与 A 重叠部分的面积分别是 22、60、35. 问阴影部分的面积是多少？(　　)




A. 15　　B. 16　　C. 17　　D. 18

8. 某公司招聘员工，按规定每人至多可投考两个职位，结果共 42 人报名，甲、乙、丙三个职位报名人数分别是 22 人、16 人、25 人，其中同时报甲、乙职位的人数为 8 人，同时报甲、丙职位的人数为 6 人，那么同时报乙、丙职位的人数为（　）。

A. 7 人　　B. 8 人　　C. 5 人　　D. 6 人

### （二）图示标数型三集合容斥原理

如果题目涉及“只满足条件 A、B 的数目”，不能直接代入标准公式时，一般选用“三集合图示标数”来作答。

**1. 特别注意“满足某条件”和“仅满足某条件”的区分；**

**2. 特别注意有没有“三个条件都不满足”的情形；**

**3. 标数时，注意由中间向外围标记。**

9. 一次运动会上，18 名游泳运动员中，有 8 名参加了仰泳，有 10 名参加了蛙泳，有 12 名参加了自由泳，有 4 名既参加仰泳又参加蛙泳，有 6 名既参加蛙泳又参加自由泳，有 5 名既参加仰泳又参加自由泳，有 2 名三个项目都参加，这 18 名游泳运动员中，只参加 1 个项目的人有多少？（　　）

A.5 名　　B.6 名　　C.7 名　　D.4 名

10.　　某工作组有 12 名外国人，其中 6 人会说英语，5 人会说法语，5 人会说西班牙语；有 3 人既会说英语又会说法语，有 2 人既会说法语又会说西班牙语，有 2 人既会说西班牙语又会说英语；有 1 人这三种语言都会说。则只会说一种语言的人比一种语言都不会说的人多(　　)。

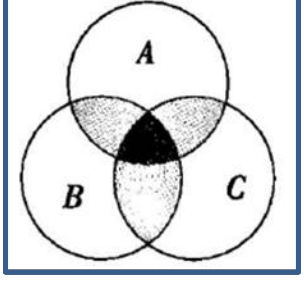
A.1 人　　B.2 人　　C.3 人　　D.5 人

11.　　对某单位的 100 名员工进行调查，结果发现他们喜欢看球赛和电影、戏剧。其中 58 人喜欢看球赛，38 人喜欢看戏剧，52 人喜欢看电影，既喜欢看球赛又喜欢看戏剧的有 18 人，既喜欢看电影又喜欢看戏剧的有 16 人，三种都喜欢看的有 12 人，则只喜欢看电影的有多少人？（　　）

A.22 人　　B.28 人　　C.30 人　　D.36 人

**（三）整体重复型三集合容斥原理**

在三集合的题型中，假设满足三个条件元素数量分别为 A、B、C，而至少满足三个条件之一的元素的总量为 W（就是 A∪B∪C）。其中：只满足一个条件的元素数量为 x（三个白色区域之和），只满足两个条件的元素数量为 y（三个灰色区域之和—重叠 1 次），三个条件都满足的元素数量为 z（黑色区域-重叠 2 次），根据右图可以得到下面两个等



式：

**W（A∪B∪C）=x+y+z=总-外**

**A+B+C=1×x+2×y+3×z**

**从图中很明显可以看出，x 和 y 都分别包含 3 个部分，是这 3 个部分的总和。因此，当题目关心的是这些的总和，而不是各个单独部分数值时，往往就应该用这两个公式。**

12. 某调查公司对甲、乙、丙三部电影的收看情况向 125 人进行调查，有 89 人看过甲片，有 47 人看过乙片，有 63 人看过丙片，其中有 24 人三部电影全看过，20 人一部也没有看过，则只看过其中两部电影的人数是（ ）。

A. 69　B. 65　C. 57　D. 46

13. 某市对 52 种建筑防水卷材产品进行质量抽检，其中有 8 种产品的低温柔度不合格，10 种产品的可溶物含量不达标，9 种产品的接缝剪切性能不合格，同时两项不合格的有 7 种，有 1 种产品这三项都不合格。则三项全部合格的建筑防水卷材产品有多少种？（ ）

A. 37　B. 36　C. 35　D. 34

14. 某高校对一些学生进行问卷调查。在接受调查的学生中，准备参加注册会计师考试的有 63 人，准备参加英语六级考试的有 89 人，准备参加计算机考试的有 47 人，三种考试都准备参加的有 24 人，准备选择两种考试都参加的有 46 人，不参加其中任何一种考试的有 15 人。问接受调查的学生共有多少人？（ ）

A. 120　B. 144　C. 177　D. 192

15. 某班 39 名同学参加短跑、跳远、投掷三项体育比赛，人数分别为 23 人，18 人，21 人，其中三项全部参加的有 5 人，有 3 人仅参加跳远比赛，有 9 人仅参加投掷比赛，那么仅参加短跑比赛的有多少人？（ ）

A. 7　B. 8　C. 9　D. 10

**课后真题练习：**

1. 某班对 50 名学生进行体检，有 20 人近视，12 人超重，4 人既近视又超重，该班 有多少人既不近视又不超重？（ ）

A. 22 人 B. 24 人 C. 26 人 D. 28 人

2. 有 70 名学生参加数学、语文考试，数学考试得 60 分以上的有 56 人，语文考试 得 60 分以上的有 62 人，都不及格的有 4 人，则两门考试都得 60 分以上的有多少人？（ ）

A. 50 B.51 C.52 D.53

3. 某科研单位共有 68 名科研人员，其中 45 人具有硕士以上学历，30 人具有高级职称，12 人兼而有之。没有高级职称也没有硕士以上学历的科研人员是多少人？（ ）

A.13 B.10 C.8 D.5

4. 某部门共 82 人，其中男性 62 人，本省籍 42 人，不是本省籍的女性 11 人，则本省籍的男性人数有（ ）。

A.33 B.21 C.22 D.23

5. 外语学校有英语、法语、日语教师共 27 人，其中只能教英语的有 8 人，只能教日语的有 6 人，能教英、日语的有 5 人，能教法、日语的有 3 人，能教英、法语的有 4 人，三种都能教的有 2 人，则只能教法语的有( )。

A.4 人 B.5 人 C.6 人 D.7 人

6. 88 名学生参加运动会，参加游泳比赛的有 23 人，参加田径比赛的有 33 人，参加球类比赛的有 54 人，既参加游泳比赛又参加田径比赛的有 5 人，既参加田径比赛又参加球类比赛的有 16 人。已知每名学生最多可参加两项比赛，问只参加田径比赛的有多少人？（ ）

A. 20 B.17 C.15 D.12

7. 五年级一班共有 55 个学生，在暑假期间都参加了特长培训班，35 人参加书法班，28 人参加美术班，31 人参加舞蹈班，其中以上三种特长培训班都参加的有 6 人，则有（ ）人只参加了一种特长培训班。

A. 45 B.33 C.29 D.22

8. 某乡镇对集贸市场 36 种食品进行检查，发现超过保质期的 7 种，防腐添加剂不合格的 9 种，产品外包装标识不规范的 6 种。其中，两项同时不合格的 5 种，三项同时不合格的 2 种。问三项全 部合格的食品有多少种？（ ）

A.14 B.21 C.23 D.32

# 精选真题练习参考答案

1. 【答案】A。

【解析】设 x 为所求，代入公式：20+12-4=50-x，解得 x=22，选择 A。

2. 【答案】C。

【解析】设 x 为所求，代入公式：56+62-x=70-4，解得 x=52，选择 C。

3. 【答案】D。

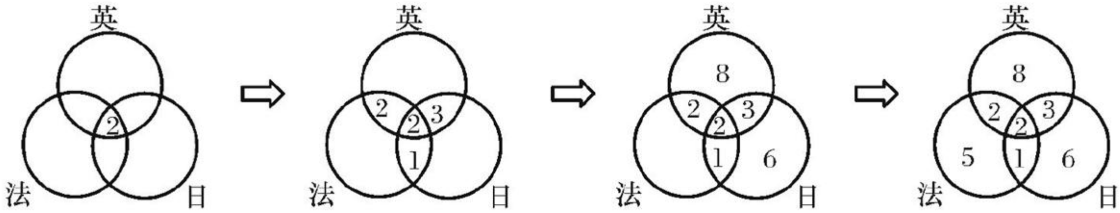
【解析】设所求为 x，根据公式有 45+30-12=68-x,x=5 ，选择 D。

4. 【答案】A。

【解析】代入公式：62+42-x=82-11，x=33。

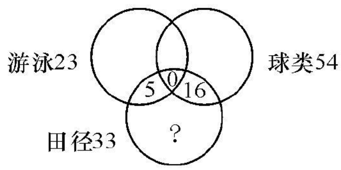
5. 【答案】B。

【解析】“由中间向外围”进行数据标记，简单加减运算，如下图所示：




6. 【答案】D。

【解析】我们把条件代入到下面的图中，很明显答案是：33-5-16=12（人），选择 D。




7. 【答案】D。

【解析】代入公式：$\begin{cases}55=x+y+6\\35+28+31=x\times1+y\times2+6\times3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=22\\y=27\end{cases}$，选择 D。

8. 【答案】C。

【解析】代入公式：$\begin{cases}W=x+2+5\\7+9+6=x\times1+5\times2+2\times3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=6\\W=13\end{cases}$，至少一项不合格的有 13 种，因此三项全部合格的产品有 36-13=23（种），答案选 C。

# 第 12 讲　抽屉原理

## 课前导学

抽屉原理题型标志：题干通常会出现“**至少……，才能保证……**”字样。

**抽屉原理 1：将多于 n 件的物品任意放到 n 个抽屉中，那么至少有一个抽屉中的物品件数不少于 2。(至少有 2 件物品在同一个抽屉)**

**抽屉原理 2：将多于 m×n 件的物品任意放到 n 个抽屉中，那么至少有一个抽屉中的物品的件数不少于 m+1。(至少有 m+1 件物品在同一个抽屉)**

例 1.把 4 件物品放在 3 个抽屉里，要想任一个抽屉中的物品数最少，只能平均放，每个抽屉先放 1 件，这样就剩下 4-3=1 件，这件物品无论放在哪个抽屉，都会有一个抽屉里有 2 件。

例 2.将 5 件物品放到 3 个抽屉里，要想保证任一个抽屉的物品最少，只能每个抽屉放一件，有 5 件物品，放了 3 件，还剩 5-3×1=2 件，这两件只能分别放入两个抽屉中，这样物品最多的抽屉中也只有 2 件物品。

例 3.将 6 件物品放到 3 个抽屉里，平均分配放，则每个抽屉放 2 件，全部放完，则物品最多的抽屉中也只有 2 件物品。

**即当物品数比抽屉数多时，不管怎么放，总有一个抽屉至少有 2 件物品。**

例 4.将 10 件物品放到 3 个抽屉里呢?

同样，按照前面的思路，要想保证任一个抽屉的物品数都最少，那么只能先平均放。

10÷3=3……1，则先每个抽屉放 3 件，还剩余 10-3×3=1 件，随便放入一个抽屉中，则这个抽屉中的物品数为 3+1=4 件。

例 5. 将 22 件物品放到 5 个抽屉里呢?

22÷5=4……2，则先每个抽屉放 4 件，还剩余 22-4×5=2 件，分别放入两个抽屉中，则这两个抽屉中的物品数为 4+1=5 件。

**即如果物体数大于抽屉数的 m 倍，那么至少有一个抽屉中的物品数不少于 m+1。**

因此抽屉原理 2 可与下面的公式结合使用:

**物品÷抽屉=商……余数**

考虑余数情况:①余数=1，结论:至少有(商+1)个苹果在同一个抽屉里

②余数=x(1<x<(n-1))，结论:至少有(商+1)个苹果在同一个抽屉里

③余数=0，　结论:至少有(商)个苹果在同一个抽屉里

**考虑最差(最不利)情况**

1. 在一个口袋里有 10 个黑球，6 个白球，4 个红球，至少取出几个球才能保证其中有白球？（　　）

A.14　　　　B.15　　　　C.17　　　　D.18

2. 一副扑克牌有四种花色，每种花色各有 13 张，现在从中任意抽牌。问最少抽几张牌，才能保证有 4 张牌是同一种花色的?（　　）

A. 12　　B. 13　　C. 15　　D. 16

3. 一副扑克（共 54 张），至少从中摸出多少张牌才能确保至少有 6 张牌的花色相同？（　）

A. 21　　B. 22　　C. 23　　D. 24

4. 有 300 名求职者参加高端人才专场招聘会，其中软件设计类、市场营销类、财务管理类和人力资源管理类分别有 100、80、70 和 50 人。问至少有多少人找到工作，才能保证一定有 70 名找到工作的人专业相同？（　　）

A. 71　　B. 119　　C. 258　　D. 277

5. 调研人员在一次市场调查活动中收回了 435 份调查问卷，其中 80%的调查问卷上填写了被调查者的手机号码。那么调研人员至少需要从这些调查表中随机抽出多少份，才能保证一定能找到两个手机号码后两位相同的被调查者？（　　）

A. 101　　B. 175　　C. 188　　D. 200

6. 有红、黄、绿三种颜色的袜子各 6 双，装在一个黑色布袋里，从袋子里任意取出袜子来，为确保至少有 2 双袜子不同颜色，则至少要取出的袜子只数是？（　）

A. 15 只　　B. 13 只　　C. 12 只　　D. 10 只

7. 有红、黄、绿三种颜色的手套各 6 双，装在一个黑色布袋里，从袋子里任意取出手套来，为确保至少有 2 双手套不同颜色，则至少要取出的手套只数是？（　　）

A. 20 只　　B. 25 只　　C. 27 只　　D. 30 只

**课后真题练习**

1. 黑色布袋中装有红、黄、蓝三种颜色的袜子各三只，如果问上眼睛从布袋中拿袜子，保证拿到两双(每双颜色要相同)袜子，那么至少得拿多少只?（　　）

A.5　　B.6　　C.7　　D.8

2. 一只袋子里装有 44 只玻璃球，其中白色的 2 只，红色的 3 只，绿色的 4 只，黄色的 5 只，棕色的 6 只，黑色的 7 只，蓝色的 8 只，透明的 9 只。如果每次从中取球一个，那么要得到 2 只同色的球，最多要取几次？（　　）

A.2　　B.8　　C.9　　D.11

3. 10 个足球队之间共赛了 11 场，赛得最多的球队至少赛了几场？（　　）

A.3　　B.4　　C.6　　D.5

4. 某区要从 10 位候选人中投票选举人大代表，现规定每位选举人必须从这 10 位中任选两位投票，问至少要有多少位选举人参加投票，才能保证有不少于 10 位选举人投了相同两位候选人的票?（　　）

A.308　　B.406　　C.451　　D.516

5. 某学校 1999 名学生去游故宫、景山和北海三地，规定每人至少去一处，至多去两地游览，那么至少有多少人游的地方相同?（　　）

A.35　　B.186　　C.247　　D.334

6. 将 104 张桌子分别放到 14 个办公室，每个人办公室至少放一张桌子，不管怎样分至少有几个办公室的桌子数是一样多?（　　）

A.2　　B.3　　C.7　　D.10

7. 一只鱼缸有很多条鱼，共有五个品种，问至少捞出多少条鱼，才能保证有五条相同品种的鱼？（　　）

A.10　　B.11　　C.20　　D.21

8. 一个口袋中有 50 个编上号码的相同的小球，其中编号为 1、2、3、4、5 的各有 10 个。取出多少小球，才能保证其中至少有 4 个号码相同的小球？（　　）

A.20 个　　B.25 个　　C.16 个　　D.30 个

# 精选真题练习参考答案

1. 【答案】B。

【解析】求取物品的件数，可从最差情况考虑。

两双颜色相同，最差情况是把一种颜色的袜子全部都拿出来，另外两种颜色都只拿出一只，再拿出来一只必然会与先前拿出来的配成一双，即一共拿出 3+2+1=6 只。

2. 【答案】C。

3. 【答案】A。

【解析】求同一抽屉中最多的物品数，利用抽屉原理解题。

因为每场球赛有 2 个球队参加，所以 11 场球赛共有 11×2=22 队次参加，把 10 个足球队看成 10 个抽屉，由于 22÷10=2……2(n=10，m=2，根据抽屉原理 2，赛得最多的球队至少赛了 2+1=3 场比赛。

4. 【答案】B。

【解析】考查利用排列组合知识构造抽屉。

从 10 位候选人中选 2 人共有$C_{10}^{2}$=45 种不同的选法，每种不同的选法即是一个抽屉。要保证有不少于 10 位选举人投了相同两位候选人的票，由抽屉原理 2 知，至少要有 45×(10-1)+1=406 位选举人投票。

5. 【答案】D。

【解析】考查利用排列组合知识构造抽屉。

根据题意，学生游玩一处的情况有$C_{3}^{1}$=3 种，游玩两处的情况也有$C_{3}^{2}$=3 种，共 6 种情况，即共有 6 个抽屉。1999÷6=333……1，根据抽屉原理 2，故至少有 m+1=333+1=334 人游的地方相同。

6. 【答案】A。

【解析】求至少有几个办公室桌子数一样，即求有几个抽屉中物品一样多。可从任意的办公室桌子不同构造抽屉。若要让办公室中桌子数不同，可以每个办公室分别为 1、2、3、4、…、13、14 张，那么 14 个房间需要(1+14)×14÷2=105 张，因此只能有一个办公室中桌子数减少 105-104=1 张，故最少有 2 个办公室的桌子数是一样的。

7. 【答案】D。

【解析】题目要求：有五条相同品种的鱼。最不利情形：每个品种都只捞出 4 条，一共 5×4=20 条件。答案：20+1-21

8. 【答案】C。

【解析】要求取多少球→求取物品的件数，考虑最差情况。

要保证至少有 4 个号码相同，最差的情况：1、2、3、4，5 每个号码各取了 3 个，这时再取一个，一定有一个号码有 4 个，所以一共要取 5×3+1=16 个小球。

# 第 13 讲　平均数和等差数列问题

## 一、平均数

**平均数=总和÷个数　　　　总和=平均数×个数。**

**①平均数介于一组数据的最大数与最小数之间；**

**②n 个数据的平均数要增加 x，则总和需要增加 nx。**

1. 甲、乙、丙、丁四人做纸花，已知甲、乙、丙三人平均每人做了 37 朵，乙、丙、丁三人平均每人做了 39 朵，已知丁做了 41 朵，问甲做了多少朵？(　　)

A.34 朵　　　　B.35 朵　　　　C.36 朵　　　　D.37 朵

2. A、B、C、D、E 五个人在一次满分为 100 分的考试中，得分都是大于 91 的互不相同的整数。如果 A、B、C 的平均分为 95 分，B、C、D 的平均分为 94 分，A 是第一名，E 是第三名得 96 分。则 D 的得分是？(　　)

A.96 分　　　　B.98 分　　　　C.97 分　　　　D.99 分

3. 一个房间里有 10 个人，平均年龄是 27 岁。另一个房间里有 15 个人，平均年龄是 37 岁。两个房间的人合在一起，他们的平均年龄是多少岁？（　　）

A.30　　B.31　　C.32　　D.33

4. 一串数字共 15 个，前 10 个的平均数是 23，后 10 个的平均数是 35，中间 5 个的平均数是 26，这 15 个数字的平均数是多少？（　　）

A.33　　　　B.31.5　　　　C.30　　　　D.29

5. 某成衣厂对 9 名缝纫工进行技术评比，9 名工人的得分恰好成等差数列，9 人的平均得分是 86 分，前 5 名工人的得分之和是 460 分，那么前 7 名工人的得分之和是多少(　　)。

A.602　　　B.623　　　C.627　　　D.631

6. 小王参加了五门百分制的测验，每门成绩都是整数。其中语文 94 分，数学的得 分最高，外语的得分等于语文和物理的平均分，物理的得分等于五门的平均分，化学的得分比外语多 2 分， 并且是五门中第二高的得分。问小王的物理考了多少分？（　）

A. 94　　　B.95　　　C.96　　　D.97

7. 今年某高校机械学院、材料学院和经管学院获得拨款的平均额是 550 万，材料 学院、经管学院和外语学院获得拨款的平均额是 630 万，机械学院和外语学院获得拨款的平均额是 670 万，则 机械学院获得的拨款额是多少万元？（　　）

A. 430　　　B. 450　　　C. 520　　　D. 550

## 二、等差数列

从第二项起，每一项与前一项之差为一个常数(固定不变的数)，这样的数列称为等差数列，这个常数就称为公差，记为 d。

[示例]2、5、8、11、14、17、20、…，从第二项起，每一项-前一项=3，公差 d=3。

**①通项公式:末项=首项+(项数-1)×公差，即 $a_n=a_1+(n-1)\times d$。**

**第 N 项=第 M 项+（N-M）×公差**

[例一]已知首项 $a_1=2$，公差 d=3，因为第 2 项与首项，差一个公差；第 3 项与首项差 2 个公差，…第 n 项与首项差 n-1 个公差，所以 $a_n=a_1+(n-1)\times d=2+(n-1)\times 3=3n-1$

由上述分析过程，还可以得到:**$a_n-a_m=(n-m)\times d$。**

**②项数公式:项数=(末项-首项)÷公差+1，即 $n=(a_n-a_1)\div d+1$。**

$$项数=\frac{末项-首项}{公差}+1$$　　**首项=末项-(项数-1)×公差**

[例二]找数列 4、7、10、13、……、40、43、46 的项数。

首先，这是一个公差为 3 的等差数列，所以其项数为(46-4)÷3+1=15 项。

**③求和公式:和=(首项+末项)×项数÷2，即 $S_n=(a_1+a_n)\times n\div 2$ 。**

**和=$\frac{(首项+末项)\times 项数}{2}$=中位数×项数=平均数×项数**

**$S_n=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$**

**④中项公式：中位数=$\frac{和}{项数}$　　和=中位数×项数**

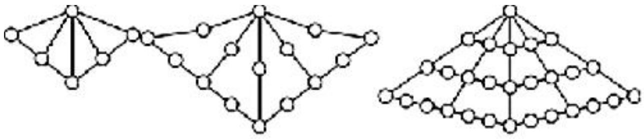
**⑤对称公式:$a_m+a_n=a_i+a_j$，其中 m+n=i+j。**

8. 某剧院有 25 排座位，后一排比前一排多 2 个座位，最后一排有 70 个座位。这个剧院共有多少个座位？（　　）

A.1104　　B.1150　　C.1170　　D.1280

9. 一次展览会上展出一套由宝石串联制成的工艺品，如下图所示，若按照这种规律依次增加一定数量的宝石，则第 10 件工艺品的宝石为（　　）颗。

A.229　　B.231　　C.268　　D.245



第一件　　第二件　　第三件

10. 编号为 1-9 的 9 个盒子里共放有 351 粒糖，已知每个盒子都比前一个盒子里多同样数量的糖。如果 1 号盒子里放 11 粒糖，那么后面的盒子比它前一个盒子里多放几粒糖?（　　）

A.7　　B.8　　C.9　　D.10

11. 10 个连续自然数的和是 205，那么其中最小的自然数是多少？（　　）

A.15　　B.16　　C.17　　D.18

12. 1992 是 24 个连续偶数的和，问这 24 个连续偶数中最大的一个是几？（　　）

A.84　　B.106　　C.108　　D.130

13. 已知有若干连续的奇数：1、3、5、7、9、11、13…所有奇数的和减去该列奇

数中的某个奇数得到 608，则被减去的奇数为（　　）。

A.15　　B.17　　C.19　　D.21

14.　　某志愿者小组外出进行志愿服务活动，小组成员排成一列进行报数点名，除小李外，其他志愿者所报数字之和减去小李所报数字，恰好等于 100。问小李是第几位，该志愿者小组共有多少人？（　　）

A.10 位，16 人　　B.10 位，15 人　　C.12 位，15 人　　D.12 位，16 人

15.　　某车间从 3 月 2 日开始每天调入一人，已知每人每天生产 1 件产品，该车间从 3 月 1 日至 3 月 21 日共生产 840 件产品，该车间原有工人多少名？（　　）

A．20　　B．30　　C．35　　D．40

**课后真题练习：**

1. 甲、乙两个数的和是 218，如果再加上一个数丙，这时三个数的平均数比甲、乙两数的平均数多 5，那么数丙是（　　）。

A.140　　B.130　　C.124　　D.127

2. 在一次法律知识竞赛中，甲机关 20 人参加，平均 80 分，乙机关 30 人参加，平均 70 分，问两个机关参加竞赛的人总平均分是多少分？（　　）

A.76　　B.75　　C.74　　D.73

3. 有四个数，去掉最大的数，其余三个数的平均数是 41；去掉最小的数，其余三个数的平均数 是 60；最大数与最小数的和是 95。那么这四个数的平均数是多少？（　）

A. 49.75　　B. 51.25　　C. 53.75　　D. 54.75

4. 某班一次期末数学考试成绩，平均分为 95.5 分，后来发现小林的成绩是 97 分 误写成 79 分。再次计算后，该班平均成绩是 95.95 分。则该班人数是（　　）。

A. 30 人　　B. 40 人　　C. 50 人　　D. 60 人

5. A、B、C、D、E 五个人做蛋糕。已知 A、B、C 平均做 21 个，B、C、D 平均做 19 个，D、E 平 均做 22 个，其中 E 比 D 多做 2 个，则 A 做了多少个？（　　）

A. 25　　B.26　　C.27　　D.28

6. 某学校组织活动进行队列训练，学生们组成一个 25 排的队列，后一排均比前一 排多 4 个人，最后一排有 125 个学生。则这个队列一共有（　　）个学生。

A. 1925　　B. 1875　　C. 2010　　D. 1765

7. 有一堆粗细均匀的原木，最上面一层有六根，每向下一层增长一根，共堆了 25 层，这堆原木共有多少根？（　　）

A. 175　　B. 200　　C. 375　　D. 450

8. 小李用几天时间看完了一本 400 页的书，第一天看 30 页，然后每天比前一天多 看 20 页。在小李看书这几天的前半段时间（按整天计算），小李一共看了（　　）页。

A. 130　　B. 150　　C. 170　　D. 190

9. 某部队组织新兵从甲地到乙地进行长途拉练。去的时候第一天走 25 千米，以后 每天都比前一天多走 5 千米，结果最后一天只走 25 千米便到达了目的地。回程时，第一天走 35 千米，以后还 是每天比前一天多走 5 千米，结果最后一天只走 30 千米便回到出发地。则甲、乙两地相距（　　）千米。

A. 175　　B. 200　　C. 225　　D. 250

10. 100 份编号为 1—100 的文件，交给 10 名文秘进行录入工作，第一个文秘拿走了 编号为 1 的文件，往后每个人都按编号顺序拿走一定数量的文件，且后边每一个人总是比前一个多拿两份， 第 10 个人拿走的文件编号之和比第 5 个人拿到的文件编号之和大多少？（　　）

A. 1282　　B. 1346　　C. 1458　　D. 1540

# 精选真题练习参考答案

1. 【答案】C。

【解析】甲、乙平均为 218÷2=109，三数平均为 109+5=114，三数总和为 114×3=342，丙应该为 342-218=124。

2. 【答案】C。【解析】总平均分=总成绩÷总人数=(20×80+30×70)÷(20+30)=74 分。

3. 【答案】A。

【解析】设四个数字为 a，b，c，d，其中 a 最大 d 最小，则 有：b+c+d=41×3=123，a+b+c=60×3=180，a+d=95，三式相加可得 a+b+c+d=199，平均数应略小于 50，选择 A。

4. 【答案】B。

【解析】假设其他同学的部分为 A，班上有 N 名同学，则：$\begin{cases}A+79=N\times 95.5\\A+97=N\times 95.95\end{cases}\Rightarrow N=40$

5. 【答案】C。

【解析】$\left.\begin{cases}\left.\begin{array}{l}A+B+C=21\times 3=63\\B+C+D=19\times 3=57\end{array}\right\}\Rightarrow A-D=6\\\left.\begin{array}{l}E+D=22\times 2=44\\E-D=2\end{array}\right\}\Rightarrow D=21\end{cases}\right\}\Rightarrow A=27$

6. 【答案】A。

【解析】根据变形的项数公式：首项=125-24×4=29，再根据求和公式：总和=（29+125）×25÷2=1925， 选择 A。

7. 【答案】D。

【解析】根据变形的项数公式：末项=6+24×1=30，再根据求和公式：总和=（6+30）×25÷2=450，选择 D。

8. 【答案】B。

【解析】直接列出每天看书的页数：400=30+50+70+90+110+50，所以小李共花了 6 天读完这本书， 因此前半段时间看了 30+50+70=150（页），答案选 B。

9. 【答案】B。

【解析】根据题意，去时一共走了（25+25+30+35+40+45+…）千米，回来时一共走（30+35+40+45+50+…）千米，这两个数字必须是相等的。通过比较，我们消去相同项，只有当第一个数列 加到 45，第二个数列加到 50 时，这两个数列求和是相等的，此时每个数列之和为 200，也即甲、乙两地相距 200 千米，选择 B。

10. 【答案】D。

【解析】这 10 名文秘分别拿了 1、3、5、7…份文件，是一个奇数数列，说明前 N 个人共拿了 $N^2$ 份文件。

前 4 个人拿了 16 份，前 5 个人拿了 25 份，说明第 5 个人拿了第 17、18、19、…、24、25 份文件；同理，前 9 个人 拿了 81 份，前 10 个人拿了 100 份，说明第 10 个人拿了第 82、83、84、…、99、100 份文件。前者相加为（17+25）×9÷2=189，后者相加为（82+100）×19÷2=1729，两个数相差 1540，选择 D。

# 第 14 讲　年龄问题

年龄问题是指研究两人或者多人之间的年龄变化和关系的问题。行测考试中常常涉及两人或者多人年龄之间的倍数关系。

常见考查方式:今年小宁 8 岁，妈妈 32 岁，那么再过多少年妈妈的岁数是小明的 2 倍?

年龄问题原则:

**①任何两人年龄差不变;**

**②两人年龄之间的倍数关系是随着年龄的增长而变小的;**

**③每过一年，所有的人都长了一岁。**

上例中，今年小宁比妈妈小 32-8=24 岁，那么小宁与妈妈的年龄差永远为 24 岁。

当小宁从 8 岁长到 12 岁时，妈妈也长 4 岁，变为 32+4=36 岁。两人年龄的倍数由 32÷8=4 倍，变化到 36÷12=3 倍。

## 一、如何解年龄问题

解决年龄问题的关键在于“年龄差不变”。一般说来解决年龄问题需要从表示年龄间关系的条件入手理解数量关系，必要时可借助**线段图**和**表格**进行分析。主要的思考方式如下:

(1)分析年龄关系时，如果能得出数量关系为“差倍”、“和倍”或“和差”，可对应利用“差倍”、“和倍”或“和差”问题数量关系列式解题。

由上例可知，两人的年龄差为 24 岁

妈妈年龄是小宁的 2 倍时，妈妈年龄-小宁=24 岁$\Rightarrow$差倍问题

由差倍问题公式可得，小宁年龄为 24÷(2-1)=24 岁，即小宁 24 岁时，妈妈的年龄等于小宁的 2 倍，因此再过 24-8=16 年。

⑵因为行测考试中，数学运算均为选择题，对于表述直接的年龄问题，没有解题思路，或者计算比较繁琐时，可采用**代入排除法**。

1. 姐姐今年 13 岁，弟弟今年 9 岁，当姐弟俩岁数和是 40 岁时，姐姐多少岁?（　　）

A.22　　B.34　　C.36　　D.43

### 1.多人之间的年龄问题

多人之间的年龄问题在行测考试中出现的频率略有增加，它主要考查多个人之间的年龄关系变化。解决此类题目的重点为规律③:**每过一年，所有的人都长了一岁。**

2. 父亲与两个儿子的年龄和为 84 岁，12 年后父亲的年龄等于两个儿子的年龄之和，请问父亲现在多少岁?（　　）

A.24　　B.36　　C.48　　D.60

3. 哥哥现在的年龄是弟弟当年年龄的 3 倍，哥哥当年的年龄与弟弟现在的年龄相同，

哥哥与弟弟现在年龄的和是 30 岁。问哥哥现在多少岁？（　　）

A.15　　B.16　　C.18　　D.19

4. 爸爸、哥哥、妹妹 3 个人，现在年龄和为 64 岁。当爸爸是哥哥年龄 3 倍时，妹妹是 9 岁，当哥哥是妹妹年龄 2 倍时，爸爸 34 岁。现在爸爸的年龄是（　）岁。

A.34　　B.39　　C.40　　D.42

**2.三等分结论**

甲、乙两人年龄不等，已知当甲像乙现在这么大时，乙 m 岁；当乙像甲现在这么大时，甲 n 岁(n>m)， 问甲、乙现在的年龄。

对于此类题目，利用**三等分结论**可以直接求解:

**三等分结论**:若甲像乙现在那么大时，乙 m 岁，乙像甲现在那么大时，甲 n 岁(n>m)，

那么甲比乙大__________岁，甲现在为______________岁,乙现在为___________岁。

甲对乙说：“当我的岁数是你现在的岁数时，你才 5 岁。”乙对甲说：“当我的岁数是你现在的岁数时，你将 50 岁。”那么，甲现在(　　)岁，乙现在(　　)岁。

5. 哥哥对弟弟说:“当我在你现在的年龄时，你才 7 岁”。弟弟对哥哥说：“当我长到你现在的年龄时，你已 22 岁了”，问弟弟现在多少岁？（　　）

A.12　　B.15　　C.17　　D.19

6. 甲对乙说：当我的岁数是你现在岁数时，你才 4 岁。乙对甲说：当我的岁数到你现在岁数时，你将有 67 岁。甲乙现在各有？（　　）

A.45岁，26岁　B.46岁，25岁　C.47岁，24岁　D.48岁，23岁

**3. 年龄推理题**

常见的特殊情况为：经过了 N 年，所有人增长的岁数和不是 N 的倍数，这说明 N 年前有人没有出生，从而可直接求出该人的年龄。

7. 小芬家由小芬和她的父母组成，小芬的父亲比母亲大 4 岁，今年全家年龄的和是 72 岁，10 年前这一家全家年龄的和是 44 岁。今年父亲多少岁？（　　）

A. 33　　　B. 34　　　C. 35　　　D. 36

**课后真题练习**

1. 父亲今年 44 岁，儿子今年 16 岁，当父亲的年龄是儿子的年龄的 8 倍时，父子的年龄和是多少？（　　）

A. 36　　B. 54　　C. 99　　D. 162

2. 兄弟俩今年的年龄之和是 35 岁，当哥哥像弟弟现在这样大时，弟弟的年龄恰好是哥哥年龄的一半，则哥哥今年年龄为(　　)岁。

A. 20　　B. 21　　C. 23　　D. 22

3. 小华今年 8 岁，他和爸爸、妈妈三人年龄之和为 81 岁。若干年后，三人平均年龄是 34 岁。到那时，小华的年龄是(　　)岁。

A. 14　　B. 15　　C. 16　　D. 17

4. 5 年前甲的年龄是乙的三倍，10 年前甲的年龄是丙的一半，若用 y 表示丙当前的年龄，下列哪一项能表示乙的当前年龄？（　　）

A $\frac{y}{6}+5$　　B. $\frac{5y}{3}+10$　　C. $\frac{y-10}{3}$　　D. $3y-5$

5. 哥哥 5 年后的年龄与弟弟 3 年前的年龄和是 29 岁，弟弟现在的年龄是两人年龄差的 4 倍。哥哥今年几岁？（　　）

A. 10　　B. 12　　C. 15　　D. 18

6. 当哥哥的年龄是弟弟现在的年龄时，哥哥的年龄是弟弟年龄的 3 倍，当弟弟的年龄是哥哥现在的年龄时，他们两人的年龄和是 48 岁，弟弟现在多少岁？（　　）

A. 12　　B. 11　　C. 10　　D. 9

7. 在一个家庭里，现在所有成员的年龄之和为 73 岁。家庭成员中有父亲、母亲、一个女儿和一个儿子，父亲比母亲大 3 岁，女儿比儿子大 2 岁。四年前家庭所有人的年龄总和是 58 岁，现在儿子多少岁？（　　）

A. 3　　B. 4　　C. 5　　D. 6

# 精选真题练习参考答案

1. 【答案】A。

【解析】抓住年龄差不变的核心，利用差倍关系求解。

父子年龄差为 44-16=28，当父亲年龄是儿子年龄 8 倍时，也即年龄差是儿子年龄的 7 倍。此时儿子年龄为 28÷7=4 岁，父亲的年龄为 4×8=32 岁，二者年龄和为 4+32=36 岁。

2. 【答案】B。

【解析】设弟弟当时的年龄为 x，则哥哥当时的年龄为 2x，年龄差为 x。

弟弟今年年龄为 2x，则哥哥今年年龄为 3x，则 2x+3x=35，解得 x=7 岁，因此哥哥今年 3×7=21 岁。

3. 【答案】B。

【解析】三人平均年龄 34 岁时，三人年龄和为 34×3=102 岁，比小华 8 岁时的年龄总和多了 102-81=21 岁，每人都长了 21÷3=7 岁，即过了 7 年。所以小华的年龄为 8+7=15 岁。

4. 【答案】A。

【解析】涉及三个人的年龄关系，比较复杂，为便于分析，可将年龄关系列成表格。

| | 当前 | 10 年前 | 5 年前 |
|---|---|---|---|
| 丙 | $y$ | $y-10$ | |
| 甲 | | $\frac{1}{2}(y-10)$ | $\frac{y}{2}$ |
| 乙 | $\frac{y}{6}+5$ | | $\frac{y}{6}$ |

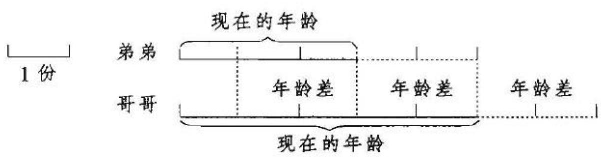
5. 【答案】C。

【解析】由“哥哥 5 年后的年龄与弟弟 3 年前的年龄和是 29 岁”可知，哥哥和弟弟现在的年龄和为 29+3-5=27 岁。设两人的年龄差为 x， 则弟弟现在的年龄为 4x，哥哥现在的年龄为 4x+x=5x，两人的年龄和为 4x+5x=9x=27，解得 x=3，所以哥哥今年为 15 岁。

另解，由第二个条件可知哥哥的年龄应是 5 的倍数，排除 B、D。代入可知 A 不符合题意，所以选 C。

6. 【答案】A。

【解析】用实线段分别表示弟弟和哥哥现在的年龄，两条实线段的长度之差表示年龄差。




假设“当哥哥的年龄是弟弟现在的年龄时，哥哥的年龄是弟弟年龄的 3 倍”时弟弟的年龄为 1 份，则弟弟现在的年龄是 3 份，哥哥现在的年龄是 5 份，哥哥和弟弟的年龄差是 2 份。那么“当弟弟的年龄是哥哥现在的年龄时”，哥哥的年龄是 5+2=7 份，那么两人的年龄和是 7+5=12 份，即每一份为 48÷12=4 岁。所以弟弟现在的年龄是 4×3=12 岁。

7. 【答案】A。

【解析】四个人经过 4 年，年龄和应该增加 4×4=16 岁，但是实际上只增加了 73-58=15 岁，说明有一个人的年龄没增加，这只能说明四年前儿子还没出生，因此现在儿子应该 3 岁，选择 A。

# 第 15 讲　和定最值问题

## 课前导学

已知若干个整数的和并给出其他限制条件，然后要求确定其中某个数的最大值或最小值，这类问题被称为和定最值问题。和定最值有多种不同的类型，解答的关键点如下：

1.要求最大值，则要使其他量尽可能的小；要求最小值，则要使其他量尽可能的大。

2.当数据可以相等时，要注意考虑“数据相等”这一极端情况。

3.当数据要求互不相等时，要注意考虑“数据按连续整数分配”这一极端情况。

**求最大量的最大值：**5 个互不相同的正整数和为 75，中位数是 18，则其中最大数的最大值可能是多少？

【解析】要令最大数尽可能大，则另外 4 个数尽可能小。因为 5 个数各不相同，中位数 18 即第三大数，所以这 4 个数为 1、2、18、19 时，它们的和最小，最大数的最大值可能为 75-(1+2+18+19)=35。

**求最大量的最小值：**现有 21 朵鲜花分给 5 人，若每个人分得的鲜花数各不相同，则分得鲜花最多的人至少分得几朵鲜花？

【解析】解题思路：让各个分量尽可能的“均等”且保持大的量仍大、小的量仍小。

要令分得最多的人鲜花数最少，那么其他 4 个人分得的鲜花数尽可能多且尽量接近最多的那个人。21÷5=4……1，5 个人分得 2、3、4、5、6 朵，因为每个人分得的鲜花数各不相同，剩余 1 朵分给鲜花最多的人，则最多的人至少分得 6+1=7 朵。

**求最小量的最小值：**6 个数的和为 48，已知各个数各不相同，且最大的数是 11，则最小数最少可能是多少？

【解析】解题思路：让其他值尽量大,要令最小数尽可能小，则其他 5 个数要尽可能大。因为 6 个数各不相同，且最大的数是 11，所以 5 个数为 11、10、9、8、7 时，它们的和最大，最小数的最小值可能是 48-(11+10+9+8+7)=3。

**求中间量的最大值：**有 21 朵鲜花分给 5 人，若每个人分得的鲜花数各不相同，则分得鲜花第三多的人最多分得几朵鲜花？

【解析】解题思路：让前面的值尽可能“均等”，后面的值尽量小。

要使第三多的人分得鲜花最多，则鲜花数最少的 2 个人应尽可能少，分别为 1 朵、2 朵。其余 3 个人的鲜花数量差距尽可能小，这 3 个人的鲜花总数为 21-(1+2)=18 朵，18÷3=6，前 3 个人的鲜花数分别为 7、6、5 朵，第三多的人最多分得 5 朵。

**求中间量的最小值：**有 21 朵鲜花分给 5 人，若每个人分得的鲜花数各不相同，且最多不能超过 7 朵，则分得鲜花第三多的人最少分得几朵鲜花？

【解析】解题思路：让前面的值尽量大，后面的值尽可能“均等”。

要使第三多的人分得鲜花最少，则鲜花最多的 2 个人应尽可能多，且不超过 7 朵，分别为 7 朵、6 朵。其余 3 个人的鲜花数量差距尽可能小，这 3 个人的鲜花总数为 21-(7+6)=8 朵，8÷3=2……2，后 3 个人分得 3、2、1 朵。因为每个人分得的鲜花数各不相同，剩余 2 朵分给第三多、第四多的人，则第三多的人最少分得 4 朵。

1. 为增强职工的锻炼意识，某单位举行了踢毽子比赛，比赛时长为 1 分钟，参加比赛的职工平均每人踢了 76 个。已知每人至少踢了 70 个，并且其中有一人踢了 88 个，如果不把该职工计算在内，那么平均每人踢了 74 个。则踢得最快的职工最多踢了多少个？

A. 88　　B. 90　　C. 92　　D. 94

2. 某城市 9 月平均气温为 28.5 度，如当月最热日和最冷日的平均气温相差不超过 10 度，则该月平均气温在 30 度及以上的日子最多有多少天？

A. 21　　B. 26　　C. 25　　D. 24

3. 现有 26 株树苗，要分植于 5 片绿地上，若使每片绿地上分得的树苗数各不同，则分得树苗最多的绿地至少可以分得几株树苗？

A. 8　　B. 7　　C. 6　　D. 5

4. 某单位 2011 年招聘了 65 名毕业生，拟分配到该单位的 7 个不同部门。假设行政部门分得的毕业生人数比其他部门都多，问行政部门分得的毕业生人数至少为多少名？

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13

5. 某单位举行趣味体育比赛，共组织了甲、乙、丙、丁 4 个队。比赛共 5 项，每项第一名得 3 分，第二名得 2 分，第三名得 1 分，第四名不得分。已知甲队获得了 3 次第一名，乙队获得了 3 次第二名，那么得分最少的队的分数不可能超过多少分？

A. 5　　B. 6　　C. 7　　D. 8

6. 某连锁企业在 10 个城市共有 100 家专卖店，每个城市的专卖店数量都不同。如果专卖店数量排名第 5 多的城市有 12 家专卖店，那么专卖店数量排名最后的城市，最多有几家专卖店？

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

7. 8 名学生参加某项竞赛，共得 131 分。已知每人得分各不相词，且最高是 21 分， 则最低分最少可能是多少？

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 5

8. 100 人参加 7 项活动，已知每个人只参加一项活动，而且每项活动参加的人数都不一样。那么，参加人数第四多的活动最多有几人参加？

A. 22　　B. 21　　C. 24　　D. 23

9. 一学生在期末考试中 6 门课成绩的平均分是 92.5 分，且 6 门课的成绩是互不相同的整数，最高分是 99 分，最低分是 76 分，则按分数从高到低居第三的那门课至少得分为：

A. 93　　B. 95　　C. 96　　D. 97

## 题目参考答案与解析

1. 【解析】设参加比赛的职工人数为 x，根据题意列方程 76x-88=74×(x-1)，解得 x=7 人，所有职工总共踢了 76×7=532 个。题目要求最快的职工最多踢了多少个，那么其他职工应尽可能少踢。已知每名职工至少踢了 70 个，那么除去踢得最多的和踢了 88 个的，其余职工都应当踢了 70 个，所以踢得最快的职工最多踢了 532-88-70×(7-2)=94 个。

2. 【解析】本月各天的温度和为 28.5×30=855 度，要使平均气温在 30 度及以上的日子最多，则应使最热日的温度尽量低，为 30 度，最冷日的温度尽量低，又已知最热日和最冷日的平均气温差不超过 10 度，所以最冷日的最低温度为 20 度。设该月平均气温在 30 度及其以上的日子最多有 x 天，则 x 应满足 30x+20×(30-x)≤855，解得 x≤25.5。所以最多有 25 天。

3. 【解析】要令树苗最多的绿地分得树苗最少，则另外四片的数量应尽可能大且尽量接近最多的绿地。 26÷5=5……1，这五片绿地分别得到 3、4、5、6、7 株树苗，因为每片绿地上的树苗数不同，剩余 1 株树苗分给最多的绿地，有 7+1=8 株，选 A。

4. 【解析】要使分得毕业生人数最多的行政部门人数最少，则其余部门人数尽可能多，即各部门人数尽量接近（可以相等）。65÷7=9……2，平均每部门人数至少为 9 人，则剩余 2 人分给行政部门有 9+2=11 人。

5. 【解析】总分为（3+2+1）×5=30 分。已知甲至少得 3×3=9 分，因为四队平均积分是 30÷4=7.5，所以甲肯定不是得分最少的队。其余三队得分至多为 30-9=21，没说各队得分不同，则得分最少的队至多为 21÷3=7 分。

6. 【解析】若想使排名最后的数量最多，则其他专卖店数量尽可能少。因为每个城市的专卖店数量都不同，第 5 名为 12 家，则第 4、第 3、第 2、第 1 名分别为 13、14、15、16 家，则前五名的总数量为 14×5=70 家，后五名的总数量为 100-70=30 家。求最小值的最大情况，让所有的值尽可能接近，成等差数列，可求得第 8 名为 30÷5=6，则第 6 到第 10 名分别为 8、7、6、5、4 家。即排名最后的最多有 4 家。

7. 【解析】要想最低分尽可能地低，则其他 7 人分数应尽可能地高。已知每人得分各不相同且最高是 21 分，则其他 7 人的分数为 21+20+19+18+17+16+15=126 分，最低分为 131-126=5 分。

8. 【解析】把这 7 项活动分为 2 组，（1-4 项）、（5-7 项）。要让第 4 项人数最多，则（5-7 项）尽量少，最少为 1+2+3=6 人，（1-4 项）最多有 100-6=94 人。94÷4=23.5，当前四项的活动有 25、24、23、22 人参加时，第四多的活动人数最多为 22 人。

9. 【解析】分数从高到低排列，第 2～5 门分数之和为 92.5×6-99-76=380，要令第 3 门成绩尽量小，则第 2 门成绩尽可能大，为 98 分。于是第 3～5 门总成绩为 380-98=282 分。总分一定，要令第 3 门尽量小，则 3、4、5 门的成绩呈等差数列。可知第 4 门成绩为平均数 282÷3=94 分，第 3 门课至少为 95 分。

**课后真题练习**

1.254 个志愿者来自不同的单位，任意两个单位的志愿者人数之和不少于 20 人，且任意两个单位的志愿者人数不同，问这些志愿者所属的单位数最多有几个？

A.17　　B.15　　C.14　　D.12

2.8 个人比赛国际象棋，约定每两人之间都要比赛一局，胜者得 2 分，平局得 1 分，负的不得分。在进行了若干局比赛之后，发现每个人的分数都不一样。问最多还有几局比赛没比？

A.3　　B.7　　C.10　　D.14

3.电视台要播放一部 30 集电视连续剧，如果要求每天安排播出的集数互不相等，该电视剧最多可以播（　）。

A.7 天　　B.8 天　　C.9 天　　D.10 天

4. 五人的体重之和是 423 斤，他们的体重都是整数，并且各不相同。则体重最轻的人，最重可能重（　　）。

A.80 斤　　B.82 斤　　C.84 斤　　D.86 斤

5.10 个箱子总重 100 公斤，且重量排在前三位的箱子总重不超过重量排在后三位的箱子总重的 1.5 倍。问最重的箱子重量最多是多少公斤？

A.$\frac{200}{15}$　　B.$\frac{500}{23}$　　C.20　　D.25

6.一次数学考试满分为 100 分，某班前六名同学的平均分为 95 分，排名第六的同学得 86 分，假如每个人得分是互不相同的整数，那么排名第三的同学最少得多少分？

A.94　　B.97　　C.95　　D.96

## 真题练习参考答案与解析

1.【答案】B。 解析：这组数据的总和为 254，当单位志愿者人数为等差数列的时候满足“任意两个单位志愿者人数不同”且离散性最差，这时单位数最多。任意两个单位志愿者人数之和不少于 20 人限定了最少的两个单位人数之和不少于 20，为 10、11。10+11+12+…+24=255，因此取 9、11、12、13…24 时恰好满足，最多有 15 个单位。

2.【答案】D。 解析：8 个人中每两人之间比赛一局，共可比赛 $C_8^2=28$ 场，每场比赛 2 分，共计 28×2= 56 分。要使未比赛的场数尽可能多，则已比赛的场数应尽可能少，即 8 个人现有的分数之和尽可能小，且每个人的分数不一样。显然最小为 0、1、2、3、4、5、6、7，即现有总分最小为 0+1+2+3+4+5+6+7=28 分。最多还需比赛(56-28)÷2=14 场。

3.【答案】A。 解析：每天播出集数尽可能少，且集数尽量接近。每天播出集数构成从 1 开始的自然 数列。易知 1+2+…+6=21，最后一天播出 30-21=9 集。最多可播 7 天。

4.【答案】B。 解析：这五人体重的中位数是 423÷5=84.6，则当他们的体重尽量接近时体重最轻的人有最大体重。五人体重呈 82、83、84、85、89 分布。

5.【答案】B。 解析：要使最重的箱子重量尽可能大，其余箱子重量应尽可能小，最极端情况为其余九个箱子重量都相等。设排在后九位的箱子的重量均为 x，可知排在第一位的箱子的重量为 1.5×3x-2x=2.5x，因此 9x+2.5x=100，解得 $x=\frac{200}{23}$,最重的箱子的重量为 $2.5\times\frac{200}{23}=\frac{500}{23}$。

6.【答案】D。 解析：把前六名的得分分为 3 组，$\{1-2名\}\{3-5名\}\{第6名\}$。要令第 3 名的得分最少，则 $\{1-2名\}$要尽量多，可知 1-2 名最多得 100+99=199 分。$\{3-5名\}$总分最少为 95×6-86-199=285 分。285÷3=95，三人得分为 96、95、94 时为等差数列，离散性最差。总分一定，离散性越差，最高分越低， 因此排名第三的同学最少得 96 分。

# 第 16 讲　排列组合与概率问题

## 一、排列组合问题

### （一）加法原理与乘法原理

**加法原理**:完成一件事，共有 n 类方案，在第 1 类方案中有 $m_1$ 种不同的方法，在第 2 类方案中有 $m_2$ 种不同的方法……在第 n 类方案中有 $m_n$ 种不同的方法，那么完成这件事共有 $(m_1+m_2+\cdots+m_n)$ 种不同的方法。

[例一]从 A 地到 B 地，坐火车有 3 种方法，坐汽车有 5 种方法，坐飞机有 2 种方法，那么从 A 地到 B 地共有多少种方法?

从 A 地到 B 地有坐火车、汽车和飞机三类方案，因此从 A 地到 B 地共有 3+5+2=10 种方法。

**乘法原理**:完成一件事，需要 n 个步骤，在第 1 个步骤中有 $m_1$ 种不同的方法，在第 2 个步骤中有 $m_2$ 种不同的方法……在第 n 个步骤中有 $m_n$ 种不同方法，那么完成这件事共有 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同方法。

[例二]从 A 地到 B 地坐飞机需要在 C 地转机，已知从 A 地到 C 地有 4 种方法，从 C 地到 B 地有 3 种方法，那么，从 A 地到 B 地共有多少种方法?

从 A 地到 B 地，需要分两个步骤完成，第一步从 A 地到 C 地，第二步从 C 地到 B 地，因此从 A 地到 B 地共有 4×3=12 种方法。

**小结:分类用加法原理，分步用乘法原理。**

### （二）基本概念

**排列**:从 n 个不同元素中任取 m 个元素按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个元素中取出 m 个元素的一个排列。所有不同排列的个数，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列数，一般我们记作 $A_n^m$。

$A_n^m=n\times(n-1)\times\cdots\times(n-m+1)$ 。

[例三]从 10 个孩子中选出 4 个孩子排成一行，有多少种排法?

第一步，从 10 个孩子中选出 1 个排在第一位，共有 10 种排法;

第二步，从剩下的 9 个孩子中选出 1 排在第二位，共有 9 种排法;

第三步，从剩下的 8 个孩子中选出 1 个排在第三位，共有 8 种排法;

第四步，从剩下的 7 个孩子中选出 1 个排在第四位，共有 7 种排法。

根据乘法原理，共有 10×9×8×7 种，也即 $A_{10}^4$ 种排法。

**全排列**:当 n 个不同元素全部取出按照一定的顺序排成一列时，叫做 n 个不同元素的一个全排列。

此时，全排列数 $A_n^m=n\times(n-1)\times\cdots\times3\times2\times1=n!$。

**组合**:从 n 个不同元素中任取 m 个元素拼成一组，叫做从 n 个元素取出 m 个元素的一个组合。所有不同组合的个数，称为 n 个不同元素取出 m 个组合的组合数，一般我们记作 $C_n^m$。

$\boldsymbol{C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}=C_n^{n-m}}$ **其中** $\boldsymbol{C_n^0=C_n^n}=1$

[例四] 从 10 个孩子中选出 4 个孩子组成一组，有多少种选法?

组成一组，即不需要考虑这 4 个孩子的顺序，是一个组合问题，因此共有$C_{10}^{4}$种选法。

上面两个示例的区别是，“排成一列”需要考虑这 4 个孩子的顺序，“组成一组”不需要考虑他们的顺序。实际上，第一个例子也就相当于在第二个例子的基础上，再将这 4 个孩子排成一列，则根据乘法原理，$A_{10}^{4}=C_{10}^{4}\cdot A_{4}^{4}$。

所以，排列与组合的关系:$A_{n}^{m}=C_{n}^{m}\cdot A_{m}^{m}$。

**小结:考虑顺序用排列，不考虑顺序用组合。**

**（三）基本解题策略**

**1.合理分类策略**

当题干描述的情况相对复杂，又不能很快找到突破口时，应深入分析，针对不同的情况，进行合理分类，将复杂过程转化为简单的情况进行计算。

需要注意的是:**①类与类之间必须互斥(互不相容)；②分类涵盖所有情况。**

1. 某班同学要订 A、B、C、D 四种学习报，每人至少订一种，最多订四种，那么每个同学有多少种不同的订报方式?（　　）

A.10　　B.12　　C.15　　D.18

**2.准确分步策略**

当题干描述的问题不能一步计算时，应针对题干所给问题，进行准确分步，将问题分解为多个步骤来进行计算。

需要注意的是:**①步与步之间互相独立(不相互影响)；②步与步之间保持连续性。**

2. 要求厨师从 12 种主料中挑选出 2 种、从 13 种配料中挑选出 3 种来烹饪某道菜肴，烹饪的方式共有 7 种，那么该厨师最多可以做出多少道不一样的菜肴?（　　）

A.131204　　B.132132　　C.130468　　D.133456

在行测考试中，有时还需要将“分步”和“分类”有机结合，可以是“类”中有“步”，也可以是“步”中有“类”。

**3.先组后排策略**

当排列问题和组合问题相混合时，应该先通过组合问题将需要排列的元素选择出来，然后再进行排列。

3. 班上从 7 名男生和 5 名女生中选出 3 男 2 女去参加五个竞赛，每个竞赛参加一人。有多少种选法?（　　）

A.120　　B.600　　C.1440　　D.42000

**（四）常用方法**

**1.捆绑法**

在排列问题中，如果题中要求两个或多个元素“相邻”时，可将这几个元素捆绑在一起，作为一个整体进行考虑。

4. 6 个人站成一排，要求甲、乙必须相邻，那么有多少种不同的排法？（　　）

A.280　　B.120　　C.240　　D.360

**2.插空法**

在排列问题中，如果题中要求两个或多个元素“不相邻”时，可先将其余无限制的 n 个元素进行排列，再将不相邻的元素插入无限制元素之间及两端所形成的(n+1)个“空”中。

如果所有元素完全相同，即为组合问题，则不需要进行排列，只需要将不相邻的元素插入空中即可。

5. 6 人站成一排，要求甲、乙必须不相邻，有多少种不同的排法？（　　）

A.240　　B.480　　C.360　　D.720

6. 某城新修建的一条道路上有 12 盏路灯，为了节省用电而又不影响正常的照明，可以熄灭其中三盏灯，但两端的灯不能熄灭，也不能熄灭相邻的两盏灯，那么熄灯的方法共有多少种？（　　）

A. $C_8^3$　　B. $A_8^3$　　C. $C_9^3$　　D. $C_{11}^3$

**3.隔板法**

如果题中要求将 n 个相同元素分成 m 组，且每组“至少一个”元素时，可用(m-1)个“挡板”插入这 n 个元素之间形成的(n-1)个”空”中，将元素隔成 m 组，此时有$C_{n-1}^{m-1}$种情况。

7. 将 10 台相同的电脑分配给 5 个村，每村至少一台，那么有多少种不同的分配方法？（　　）

A.126　　B.320　　C.3024　　D.1024

8. 南阳中学有语文教师 8 名、数学教师 7 名、英语教师 5 名和体育教师 2 名。现要从以上四科教师中各选出 1 名教师去参加培训，问共有几种不同的选法？（　　）

A. 96　　B. 124　　C. 382　　D. 560

9. 从甲地到乙地每天有直达班车 4 班，从甲地到丙地每天有直达班车 5 班，从丙 地到乙地每天有直达班车 3 班，则从甲地到乙地共有（　　）不同的乘车法。

A. 12 种　　B. 19 种　　C. 32 种　　D. 60 种

**分类讨论型**

10. 某单位有职工 15 人，其中业务人员 9 人。现要从整个单位选出 3 人参加培训，要求其中业务人员的人数不能少于非业务人员的人数。问有多少种不同的选人方法？（　　）

A. 156　　B. 216　　C. 240　　D. 300

11. 甲、乙两个科室各有 4 名职员，且都是男女各半。现从两个科室中选出 4 人参加 培训，要求女职员比重不得低于一半，且每个科室至少选一人。问有多少种不同的选法？（　）

A.67　　B.63　　C.53　　D. 51

**分步计算型**

12. 某科室共有 8 人，现在需要抽出两个 2 人的小组到不同的下级单位检查工作，问共有多少种不同的安排方案？（　）

A. 210　　B. 260　　C. 420　　D. 840

13. 一次会议某单位邀请了 10 名专家，该单位预定了 10 个房间，其中一层 5 间、二层 5 间。已知邀请专家中 4 人要求住二层、3 人要求住一层、其余 3 人住任一层均可。那么要满足他们的住房要求且每人 1 间，有多少种不同的安排方案？（　　）

A.43200　　　　　B.7200　　　　C.450　　　　D.75

14.　　张明去玩具商店给儿子买玩具，他准备挑选四个玩具枪中的一个，三种球类中的一类，五种积铁中的两种，若不考虑挑选次序，问可以有几种选择方法？（　　）

A.120　　B.130　　C.140　　D.150

15.　　小张在下周有 3 项工作要完成，如果每天只做一项工作，每项工作可以安排在周一到周五这 5 天中的任何一天，问共有多少种安排方法？（　　）

A.10　　B.20　　C.60　　D.120

16.　　某办公室共有 7 个科员，2 个副主任，现安排 1 个副主任带领 4 个科员外出考察，不同的安排方案共有（　　）种。

A.70　　B.210　　C.212　　D.420

## 二、错位排列问题

错位排列问题：有n封信和n个信封，则每封信都不装在自己的信封里，可能的方法的种数计作$D_n$,则：$D_1$＝　　，$D_2$＝　　，$D_3$＝　　，$D_4$＝　　，$D_5$＝　　　，$D_6$＝

17.　　甲、乙、丙、丁四个人站成一排，已知：甲不站在第一位，乙不站在第二位，丙不站在第三位，丁不站在第四位，则所有可能的站法数为多少种？（　　）

A.9　　　B.44　　　C.265　　　D.256

18.　　小明给住在五个国家的五位朋友分别写一封信，这些信都装错了信封的情况共有多少种?(　　)

A. 32　　B. 44　　C. 64　　D. 120

19.　　五个瓶子都贴了标签，其中恰好贴错了三个，则错的可能情况共有多少种?(　)

A.6　B.10　　C.12　　D.20

20.　　幼儿园某小班有 7 名小朋友，上课铃响慌乱中迅速回到座位上，结果只有 3 名小朋友坐到了自己的位置之上，请问这样的情况一共有多少种?(　　)

A.315　　B.350　　C.385　　D.420

## 三、概率问题

概率，是一个在 0 到 1 之间的实数，是对随机事件发生的可能性的度量。随机事件概率的计算首先应确定该随机事件的概率模型。

概率问题核心公式

1.单独概论= $\frac{满足条件的情况数}{总的情况数}$

2.某条件成立概率＝1-该条件不成立的概率

3.分步概率＝满足条件的每个步骤概率之积

4.总的概率＝满足条件的各种情况概率之和

5.条件概率：“A成立”时“B成立”的概率＝A、B同时成立的概率÷A成立的概率

在行测考试中常见的几种概率模型有以下三种:

**1.普通概率**

将所有情况分成 n 个等可能的情形事件 A 包括了其中的 m 个情形那么称事件 A 发生的概率为 P（A）=$\frac{m}{n}$。

假设事件 B 为“事件 A 没有发生”，则事件 B 的对立面为“事件 A 一定会发生”，即 P(A)+P(B)=1,故 P(A)=1-P(B)。

例题 1.将一个硬币掷两次，恰好有一次正面朝上且有一次反面朝上的概率是多少?（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{1}{4}$　　D. $\frac{2}{3}$

解析：每次掷币、正面朝上或反而朝上的可能性相等。硬币投掷两次一共可能的情况有 4 种，分别为：（正、正）、（正，反），（反、正）、（反、反），其中有一次为正且有一次为反的情况有 2 种，所以其概率为$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$。

另解，全部情况的概率为 1，同时为正面和同时反面的概率均为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$，则一正一反的概率为 1-2×$\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

此题答案为 A。

**2.条件概率**

事件 A 在另外一个事件 B 已经发生条件下的发生概率。条件概率表示为 P(A|B)，读作“在 B 条件下 A 发生的概率”。

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$，其中 P(AB) 为 AB 同时发生的概率，P(B)为 B 发生的概率。

例题 2.小孙的口袋里有四颗糖，一颗巧克力味的，一颗果味的，两颗牛奶味的。小孙任意从口袋里取出两颗糖，他看了看后说，其中一颗是牛奶味的。问小孙取出的另一颗糖也是牛奶味的可能性(概率)是多少？（　　）

A. $\frac{1}{3}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{5}$　　D. $\frac{1}{6}$

解析:题目要求在其中一颗是牛奶味的前提下求另一颗糖也是牛奶味的概率，因此本题为条件概率问题。

事件 B(已经发生的条件):一颗是牛奶糖；

事件 A:另一颗糖是牛奶糖；

事件 AB: 两颗糖都是牛奶糖。

从四颗糖中取出两颗，有$C_4^2$=6 种情况，其中一颗是牛奶味的情况有$C_4^2$-1=5 种(减去的这 1 种，是取出的两颗糖一颗是巧克力味，一颗是果味这种情况)，则 $P(B)=\frac{5}{6}$;

两颗糖都是牛奶糖的情况有 1 种，则 $P(AB)=\frac{1}{6}$。

$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{5}$

此题答案为 C。

另解，此题也将事件 B“一颗是牛奶糖”发生的情况看成是 5 种等可能的情形，事件 AB 发生的情形包含了其中的 1 种情形，则根据普通事件概率可知，所求概率为$\frac{1}{5}$。

**3.多次试验概率**

如果在一次试验中事件 A 发生的概率为 p，在 n 次独立重复试验中，事件 A 发生 k 次的概率 $P(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$。

[示例]某人进行一次射击练习，已知其每次射中靶心的概率是 80%，求此人 5 次射击中有 4 次命中的概率。

已知 5 次射击有 4 次命中，先选出具体哪 4 次命中，选取的方法有$C_5^4$种；每次命中的概率是 80%，剩下一次没有命中，概率为(1-80%)，

根据乘法原理，所求概率为$C_5^4$（80%)$^4$(1-80%)=40.96%。

例题 3.某斯诺克比赛的规则是 11 局 6 胜制。甲、乙两位球手对阵，在每局比赛中，甲、乙获胜的概率分别是 60%和 40%，若前 3 局甲已经连胜 3 局，问甲在第 11 局才取得比赛胜利的概率大约是多少？（　　）

A.0.02　　B.0.03　　C.0.05　　D.0.06

解析:在每局比赛中，甲获胜的概率不变，因此甲在 n 局比赛中获胜 k 次的概率为多次试验概率。

甲在第 11 局比赛才取得比赛胜利，说明甲在接下来的 7 局比赛中获胜 2 局，且在最后一局获胜。

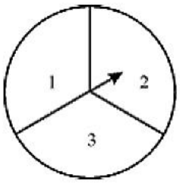
根据多次试验概率的计算公式，甲在接下来的7局比赛中获胜2局的概率:

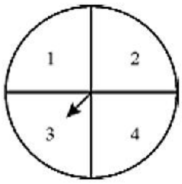
P（k=2）=$C_7^2$（60%）$^2$(1-60%)$^5$；　甲最后一局获胜的概率为60%，根据乘法原理，所求概率为P(k=2)×60%≈0.05。

此题答案为C。

21.　　某商场为招揽顾客，推出转盘投资活动。如图所示，两个数字转盘上的指针都可以转动，且可以保证指针转到盘面上的任一数字的机会都是相等的。顾客只要同时转动两个转盘，当盘面停下后，指针所指的数相乘为奇数即可以获得商场提供的奖品，则顾客获奖的概率是（　　）。

A.1/4　　B.1/3　　C.1/2　　D.2/3




22.　　某人四级考试通过的概率为0.4，他准备考三次，则能通过的概率是（　　）。

A.0.216　　B.0.064　　C.0.784　　D.0.4

23.　　乒乓球比赛的规则是五局三胜制。甲、乙两球员的胜率分别是60％与40%。在一次比赛中，若甲先连胜了前两局，则甲最后获胜的胜率是？（　　）

A.为60%　　B.在81%—85％之间

C.在86%—90％之间　　D.在91％以上

24.　　盒中有4个白球6个红球，无放回地每次抽取1个，则第二次取到白球的概率是？（　　）

A.2/15　　B.4/15　　C.2/5　　D.3/5

25.　　有一个摆地摊的摊主，他拿出3个白球，3个黑球，放在一个袋子里，让人们摸球中奖。只需2元就可以从袋子里摸3个球，如果摸到的3个球都是白球，可得10元回

扣，那么中奖的概率是多少?如果一天有 300 人摸奖，估计摊主能赚走多少元?( )

A. 1/40，350　　B.1/20，450　　C.1/30，420　　D. 1/10，450

# 参考答案及解析

1. 【答案】C。

【解析】每个同学所订报纸的数量和种类各不相同，数量包括一种、二种、三种、四种这四种情况。因此，可以很方便按照数量进行分类：

①订一种时有$C_4^1$=4 种；②订两种时有$C_4^2$=6 种；

③订三种时有$C_4^3$=4 种；④订四种时有$C_4^4$=1 种。

根据加法原理，订报方式共有 4+6+4+1=15 种。

**快解**：此题也可分步考虑。对于每一种报纸都有订和不订两种情况，根据乘法原理，共有 $2^4$ 种订报方式，减去每种报纸都不订这一种情况，则所求为 $2^4-1=15$ 种。此题答案为 C。

2. 【答案】B。

【解析】解析：烹饪某道菜肴需要挑选主料、配料、烹饪方式三个步骤：

第一步，从 12 种主料中挑选 2 种，共有$C_{12}^2$种方式；

第二步，从 13 种配料中挑选 3 种，共有$C_{13}^3$种方式；

第三步，从 7 种烹饪方式中挑选一种，共有$C_7^1$种方式。

根据乘法原理，不一样的菜肴共有$C_{12}^2 \times C_{13}^3 \times C_7^1$种。由于选项尾数各不相同，故可以利用尾数确定结果。$C_{12}^2$的尾数是 6，$C_{13}^3$的尾数是 6，$C_7^1$=7，6×6×7 的尾数是 2，只有 B 项符合。此题答案为 B。

3. 【答案】D。

【解析】解析：此题既涉及排列问题(参加五个不同的竞赛)，又涉及组合问题(从 12 名学生中选出 5 名），应该先组后排。

首先从 7 名男生和 5 名女生中选出 3 男 2 女参加比赛，这是组合问题，有$C_7^3C_5^2$种选法；

再让这 5 名学生分别参加五个竞赛，即进行全排列，有$A_5^5$种选法；

因此一共有$C_7^3C_5^2A_5^5$=42000 种。

4. 【答案】C。

【解析】要求“甲、乙必须相邻”，则可将甲、乙“捆绑”在一起，看作一个人参与排列，共有$A_5^5$=120 种。再考虑甲、乙两人本身的顺序(即甲在乙的左边还是右边)，有$A_2^2$=2 种。所以共有 120×2=240 种。

5. 【答案】B。

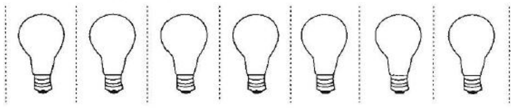
【解析】要求“甲、乙必须不相邻”，可以先将除甲、乙外其他 4 人进行全排列有$A_4^4$=24 种；再将甲、乙插到 4 人之间和两端形成的 5 个空中，有$A_5^2$=20 种。

由乘法原理，不同的排法共有 24×20=480 种。

6. 【答案】A。

【解析】共有 12 盏灯，两端的两盏不能熄灭，考虑中间 10 盏灯，由“不能熄灭相邻的两盏灯”可知，被熄灭的 3 盏灯互不相邻，因此，题目可以转化为“10 盏路灯排成一排，要求被熄灭的 3 盏灯互不相邻，有多少种熄灯的方法？”

可使用插空法。由于这里的灯完全相同，所以不需要进行排列，只需将要熄灭的 3 盏灯插入剩下的 7 盏与两端形成的 8 个空中，如图：



一共有$C_8^3$=56 种熄灯的方法。

此题答案为 A。

7. 【答案】A。

【解析】解析: 10 台电脑并成一排，中间形成 9 个空，在这 9 个空中任意插入 4 个板，就把这 10 台电脑分成了 5 部分，每一种插法就对应一种分配方法，故有$C_9^4$=126 种分法。

8. 【答案】D。

【解析】乘法原理，各选 1 名的选法有 8×7×5×2=560 种，选择 D。

9. 【答案】B。

【解析】根据基本的加法原理和乘法原理，一共有：4+5×3=19（种）方法，选择 B。

10. 【答案】D。

【解析】单位共有业务人员 9 人，非业务人员 6 人。要求 3 个人中业务人员不少于非业务人员，那么只有下面两种情况：

（1）3 个业务人员+0 个非业务人员，共有 ：$C_9^3$=84（种）选法；

（2）2 个业务人员+1 个非业务人员，共有$C_9^2 \times C_6^1$=216（种）选法；

综上，一共应该有 300 种选人方法，选择 D。

11. 【答案】D。

【解析】满足“女职员比重不得低于一半”共有 3 种情形：

（1）4 女 0 男，只有唯一的 1 种选法；

（2）3 女 1 男，$C_4^3 \times C_4^1$ =16（种）选法；

（3）2 女 2 男，$C_4^2 \times C_4^2$ =36（种）选法，其中 2 种选法只从一个科室中挑选，还剩 34 种。

综上，一共有 1+16+34=51（种）选法。

12. 【答案】C。【解析】首先，抽调 1 个 2 人小组到第一个单位，有$C_8^2$种选法。然后，再选出另 1 个 2 人小组到另一个单位，有$C_6^2$种选法。到两个不同的单位，有 2 种方案。根据乘法原理：共有 $2C_8^2 \times C_6^2$ =420（种），选择 C。

13. 【答案】A。

【解析】我们分三步来安排：

（1）先安排 4 人住二层，$A_5^4$=120；（2）再安排 3 人住一层，$A_5^3$=60；（3）最后安排剩下 3 人，$A_3^3$=6； 乘法原理，三个数字相乘，得到 43200，选择 A。

14. 【答案】A。

【解析】根据乘法原理共有 4×3×$C_5^2$ =120（种）选法。所以选择 A 选项。

15. 【答案】C。

【解析】排列问题，五天中挑三天来做工作，这 3 天与顺序有关。所以$A_5^3$=60

16. 【答案】A。

【解析】根据乘法原理共有$C_2^1 \times C_7^4$=70（种）。所以选择 A 选项。

17.　　【答案】A。

18.　　【答案】B。

19.　　【答案】D。

【解析】先从五个瓶子中选出三个瓶子，共有$C_5^3$=10 种方法；然后对这三个瓶子进行错位排列共有$D_2$=2 种方法。因此，所有可能的方法数为 10×2=20 种。

20.　　【答案】A。

【解析】先从 7 名小朋友中选出 4 名小朋友，共有$C_7^4$=35 种方法；然后对这 4 名小朋友进行错位排列共有$D_4$=9 种方法。因此，所有可能的方法数为 35×9=315 种方法。

快解：$D_4$=9，所以正确答案是 9 的倍数。

21.　　【答案】B。

【解析】相乘为奇数的情况需要两个转盘均为奇数。第一个转盘转到奇数的概率为$\frac{2}{3}$，第二个转盘转到奇数的概率为$\frac{1}{2}$，分步相乘得到$\frac{1}{3}$，选择 B。

22.　　【答案】C。

【解析】解一：他通过考试一共有三种情况：①考一次以能通过的概率为 0.4；②考第二次才能通过的概率为 0.6×0.4=0.24；③考第三次才能通过的概率为 0.6×0.6×0.4=0.144，因此考三次能通过的概率为 0.4+0.24+0.144=0.784

解二：逆向分析，他不能通过的概率是 0.6×0.6×0.6=0.216，那么通过的概率是 1-0.216=0.784。

23.　　【答案】D。

【解析】乙如果要获胜，则乙后三场都要获胜（五局三胜制），其概率为 40%×40%×40%＝6.4%，因此，甲获胜的概率为 1-6.4%＝93.6%，选择 D。

24.　　【答案】C。

【解析】第一次抽到红球、第二次抽到白球的概率为（6/10）×（4/9）＝4/15；

第一次抽到白球、第二次抽到白球的概率为（4/10）×（3/9）＝2/15；

综上，第二次抽到白球的概率为4/15+2/15＝2/5

25.　　【答案】B。

【解析】摸出三个球的总情况数为 $C_6^3$＝20 种，都是白球的可能性只有 1 种，因此摸到白球的概率为 1/20。300 人摸奖，平均中奖的人数 300×（1/20）＝15(人)，估计摊主能赚走 2×300-15×10＝450(元)。

# 第 17 讲　比赛计数问题

**要点提示：**

N 支队伍的比赛所需场次

**淘汰赛：**淘汰赛中，每局淘汰 1 个人/队；

仅需决出冠、亚军：<u>　N-1　</u>场　　　　需决出第1、2、3、4名：<u>　N　</u>场

**循环赛：**

N 人进行循环赛，每人需要和其它人进行一场比赛，所以每人需要进行 N-1 场比赛；由于每场比赛都是 2 个人共同进行，所以总场次应该为

单循环（任意两个队打一场比赛）：$C_N^2=\frac{N\times（N-1）}{2}$

双循环（任意两个队打两场比赛）：$2C_N^2$=N×（N-1）

涉及到胜负以及积分的比赛问题，往往需要利用“**构造法**”来解答。

注：默认的循环赛应该为“单循环赛”。

1. 有 64 位羽毛球运动员在进行冠军争夺赛，通过比赛，将从中产生一名冠军。这次比赛实行捉对淘汰制。在一轮比赛全部结束后，失败者失去继续比赛的资格，而胜利者再次抽签，参加下一轮的比赛。问一共要进行多少场比赛才能最终产生冠军?(　　)

A.32　　　B.63　　　C.64　　　D.128

2. 9 个队在 9 个场地进行循环赛，平均每个球场举行几场？（　　）

A.7　　B.6　　C.5　　D.4

3. 某足球赛决赛，共有 24 个队参加，它们先分成六个小组进行循环赛，决出 16 强，这 16 个队按照确定的程序进行淘汰赛，最后决出冠、亚军和第三、四名。总共需要安排多少场比赛？（　　）

A.48　　B.51　　C.52　　D.54

4. 十支球队打联赛，每两支球队都需要进行主、客两场比赛，请问一共需要打多少场比赛？（　　）

A.90　　　B.95　　　C.98　　　D.99

5. 100 名男女运动员参加乒乓球单打淘汰赛，要产生男、女冠军各一名，则要安排单打赛多少场？（　　）

A.90　　　B.95　　　C.98　　　D.99

# 参考答案及解析

1. 【答案】B。

【解析】根据公式，64 名运动员进行淘汰赛，需要进行 63 场比赛产生冠军。

2. 【答案】D。

解一：9 个队进行循环赛需要打$C_9^2$=$\frac{9×8)}{2}$=36 场，每个球场举行 36÷9=4（场）；

解二：想象这 9 个场地分别是 9 个队伍的主场，由于每个队伍需要进行 8 场比赛，一半主场一半客场，因此需要在自家主场进行 4 场比赛。

3. 【答案】C。

【解析】24 个队分成 6 个小组，每个小组 4 个队：6×$C_4^2$=6×6=36

16 个队进行淘汰赛（决出前 4 名）：16 场 。

共 52 场。

4. 【答案】A。

【解析】双循环：2$C_{10}^2$=90（场）。

5. 【答案】C。

# 第 18 讲　几何问题

## 一、几何公式法

几何问题一般涉及几何图形的边长、周长、面积、表面积、体积、角度等相关变量，其中最基础的一类题型，就是关于规则基本图形（三角形、长方形、正方形、圆形、扇形、球形、柱形、锥形等）的直接计算问题。这类题型我们一般直接利用公式进行求解，这是整个几何问题的基础。

**●题型一：几何长度**

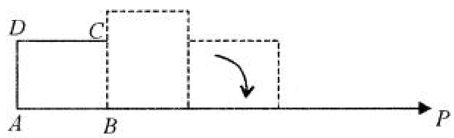
**几何周长核心公式**

正方形的周长$C_{正方形}=4a$ ；长方形周长$C_{长方形}=2(a+b)$；

圆形周长$C_{圆}=2\pi r$; 扇形周长$C_{扇形}=\frac{n}{360}\times 2\pi r+2r$。

1. 长方形 ABCD 从图示的位置开始沿着 AP 每秒转动 90 度（无滑动情况），已知 AB=4 厘米，BC=3 厘米，当长方形的右端到达距离 A 为 46 厘米的位置时是（　　）秒后。

A. 11　B. 12




C. 13　D. 14

**●题型二：角度长度**

平面图形角度与长度重要性质

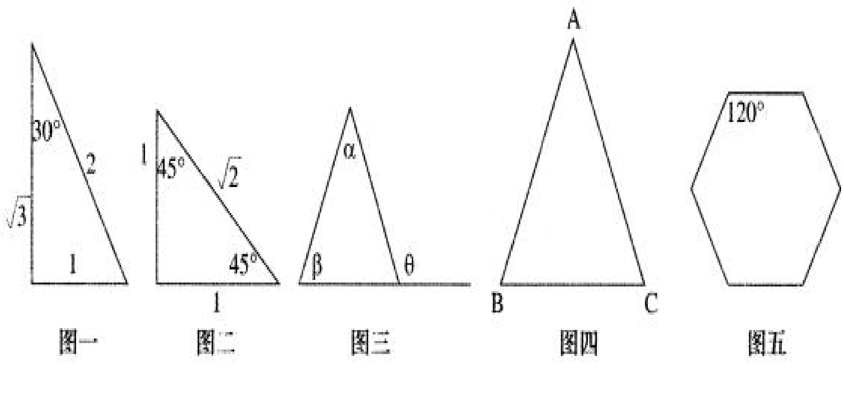
1. 在直角三角形中（见图一），斜边是“30°角所对的直角边”长度的 2 倍，另外一条直角边是“30°角所对的直角边”长度的$\sqrt{3}$倍；

2. 在等腰直角三角形中（见图二），斜边是直角边长度的$\sqrt{2}$倍；

3. 对于一个三角形（见图三），外角等于与其不相邻的两个内角之和，即$\theta=\alpha+\beta$；

4. 对于一个三角形（见图四），等边对等角，即：AB=AC⇒∠B=∠C；

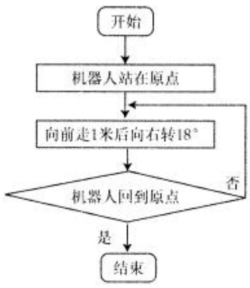
5. 正 N 边形的内角之和为（N—2）×180°，单个内角为$180-\frac{360°}{N}$，譬如正四、五、六、八边形的单个内角分别为 90°、108°、120°、135°。




图一　图二　图三　图四　图五

2. 科技馆为某机器人编制一段程序，如果机器人在平地上按照图中所示的步骤行走，那么该机器人所走的总路程为多少米？

A.20 米　　B.15 米




C.12 米　　D.10 米

3. 文化广场举行放风筝比赛，老年组老王、老侯、老黄三位选手同场竞技，评委测量各人放出的风筝线长分别为 60 米、50 米、40 米，风筝线与地平面所成角分别为$\frac{\pi}{6}$、$\frac{\pi}{4}$、$\frac{\pi}{3}$，假设风筝线看做是拉直的，则三位选手放风筝最高的是（　　）。

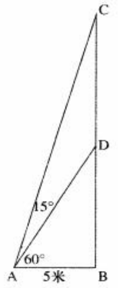
A.老王　　B.老侯　　C.老黄　　D.不能确定

4. 游乐场的摩天轮半径为 10 米，匀速旋转一周需要 2 分钟。小浩坐在最底部的轿厢（距离地面 0.1 米），当摩天轮启动旋转 40 秒时小浩距离地面的高度是多少米？（　）

A.15　　B.12.1　　C.11　　D.15.1

5. 小张在路上匀速行走，观测到前方垂直悬挂的一条彩色灯带，其底部和顶部的仰角分别为 60° 和 75° 。他沿直线继续往前走，5 秒后恰好走到灯带的正下方。若小张行走的速度为 3.6 千米/小时，那么这条灯带长（　　）。

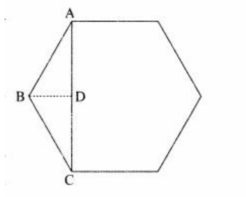
A.5 米　　B.10 米




C.18 米　　D.36 米

6. 老王围着边长为 50 米的正六边形的草地跑步，他从某个角点出发，按顺时针方向跑了 500 米，距出发点直线距离多少米？（　　）

A. $50\sqrt{2}$　　　　B. $50\sqrt{3}$




C. 25（$\sqrt{2}$+1）　D. 50（$\sqrt{3}$-1）

●题型三：几何面积

几何面积核心公式：

正方形面积$S_{正方形}=a^2$；**菱形（包括正方形）面积等于对角线乘积的一半**；

长方形面积$S_{长方形}$=ab；平行四边形面积$S_{平行四边形}$=ah；

梯形面积$S_{梯形}=\frac{1}{2}$（a+b）h；正方体表面积=$6a^2$；长方体表面积=2ab+2bc+2ac；

圆形面积$S_{圆}=\pi R^2$；扇形面积$S_{扇形}=\frac{n}{360}\pi R^2$=半径×弧长÷2；球表面积=$4\pi R^2=\pi D^2$

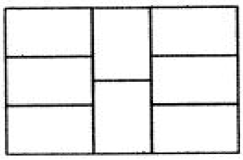
三角形面积$S_{三角形}=\frac{1}{2}$ah=$\frac{1}{2}$absinC；**等边三角形的边长为 a，那么其面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$；**

7. 若将一个长为 8 厘米、宽为 6 厘米的长方形盖在一个圆上，两个图形重叠部分的面积占圆的三分之二，占长方形面积的一半。则这个圆的面积为多少平方厘米？（　　）

A. 64　　　　B. 24　　　　C. 48　　　　D. 36

8. 如图所示，8 块同样大小的长方形钢板拼成了一块大的长方形钢板，已知大长方形钢板周长为 112 厘米，那么大长方形钢板的面积是（　　）平方厘米。

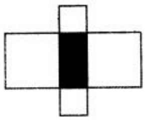
A. 432　　　　B. 588



C. 768　　　　D. 945

9. 右图中间阴影部分为长方形。它的四周是四个正方形，这四个正方形的周长和是 320 厘米，面积和是 1700 平方厘米，则阴影部分的面积是（　　）平方厘米。

A. 375　　　　B. 400



C. 425　　　　D. 430

**●题型四：几何体积**

几何体积核心公式：

正方体体积=$a^3$；长方体体积= abc；球体积=$\frac{4}{3}\pi r^3$；

棱柱体积=Sh；圆柱体积=Sh=$\pi r^2$h ；

棱锥体积= $\frac{1}{3}$Sh ；圆锥体积= $\frac{1}{3}$Sh = $\frac{1}{3}\pi r^2$h；

正四面体的边长为 a，那么其体积为$\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$

10. 某蓄水池为长方体，其长是宽的 2 倍，高为 3 米。如果用每分钟可抽水 1 立方米的抽水机抽水，10 小时可以将满池水抽空。则该蓄水池的宽是多少米？（　　）

A. 5　　　　B. 10　　　　C. 15　　　　D. 20

11. 甲、乙两个圆柱体容器的底面积之比为 2：3，容器中的水深分别为 10 厘米和 5 厘米。现将甲容器中的水倒一半在乙容器中，则此时两个容器中的水深之比为（　　）。

A. 2 ：3　　　　B. 3 ：4　　　　C. 2 ：5　　　　D. 3 ：5

**二、割补平移法**

在数学运算题型当中，还有相当多的几何图形是“不规范”的，或者是利用公式求解较为麻烦的，这时候就需要我们利用“割补平移”的方法来求解。

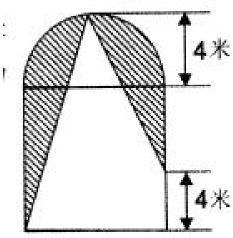
**●题型一：分割求解型**

核心提示：将一个整体图形分割为多个部分，利用整体与部分之间的关系来求解。

12. 如图所示，在一个边长为 8 米的正方形与一个直径为 8 米的半圆形组成的花坛中，阴影部分栽种了新引进的郁金香，则郁金香的栽种面积为（　　）平方米。

A. 4+4π　　　　B. 4+8π

C. 8+8π　　　　D. 16+8π




**●题型二：嵌套求补型**

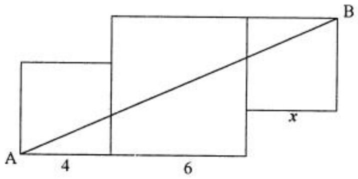
核心提示：当两个规则图形存在“包含”关系的时候，“大规则图形”挖去“小规则图形”所剩下的形状往往是不规则的，其面积必然是两个规则图形的面积差。我们称这一类几何题型为“嵌套求补型”。

13. 有一周长为 100 米的长方形花园，在花园外围沿花园建一条等宽的环路，路的面积为 600 平方米，则路的宽度为（　　）米。

A. 3 或 4　　B. 5　　C. 8　　D. 10 或 15

14. 下图是由三个边长分别为 4、6、x 的正方形所组成的图形，直线 AB 将它分成面积相等的两部分，则 x 的值是（　　）。

A. 3 或 5　　B. 2 或 4

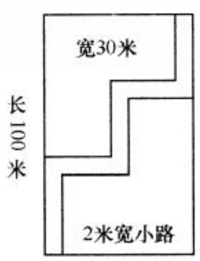



C. 1 或 3　　D. 1 或 6

●**题型三：平移补齐型**

15. 如右图所示，有一块长 100 米、宽 30 米的长方形空地需要铺草皮，空地中间预留一条宽 2 米的走道铺设水泥板。已知草皮每平方米 50 元，水泥板每平方米 40 元，草皮和水泥板均可以切割拼装。购买铺完这块空地所需的水泥板和草皮共需花费（　　）元。

A. 147440　　B. 147400



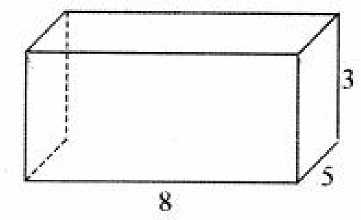

C. 146860　　D. 146820

●**题型四：立体切割型**

16. 沿一个平面将长、宽和高分别为 8、5 和 3 厘米的长方体切割为两部分，问两部分的表面积之和最大是多少平方厘米？（　　）

A. 206　　B. 238

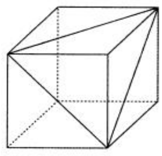
C. $158+16\sqrt{34}$　　　D. $158+10\sqrt{73}$




17. 将一个棱长为整数的正方体零件切掉一个角，截面是面积为 $100\sqrt{3}$ 的三角形。问其棱长最小为多少？（　　）

A. 15　　　B. 10

C. 8　　　D. 6



18. 一个长方体木块恰好能切割成三个正方体木块，三个正方体木块表面积之和比原来的长方体木块的表面积增加了 64 平方厘米。则长方体木块的体积为（　　）立方厘米。

A. 128　　　B. 192　　　C. 256　　　D. 512

## 三、几何特性

**特性一：等比放缩**

一个几何图形，若其尺度变为原来的 m 倍，则：

1. 所有对应角度不发生改变；　　　2. 所有对应长度变为原来的 **m 倍**；

3. 所有对应面积变为原来的 $\boldsymbol{m^2}$ **倍**；　　　4. 所有对应体积变为原来的 $\boldsymbol{m^3}$ **倍**。

19. 正六面体的表面积增加 96%，则棱长增加多少？（　　）

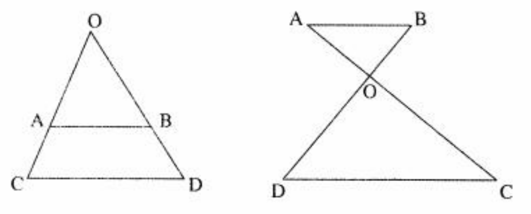
A. 20%　　　B. 30%　　　C. 40%　　　D. 50%

**特性二：相似比例**

相似三角形有以下两条判定法则（也是其重要性质）：

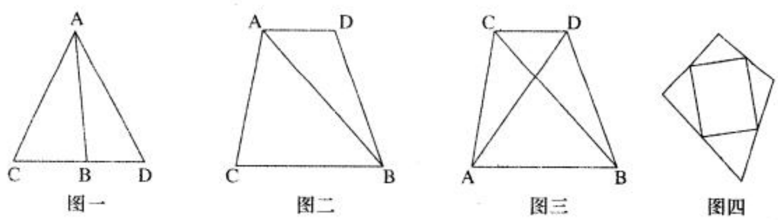
1. 三个角分别相等；　　2. 三条边成比例。

下图显示了常见的两类相似三角形出现的形式，只要 AB 与 CD 平行，那么△OAB 与△OCD 就是相似三角形，其对应角都是相等的。**如果△OCD 有一条边是△OAB 所对应边的 a 倍，那么另外两条边也应该是其对应边的 a 倍，并且前者面积是后者面积的** $\boldsymbol{a^2}$ **倍。**




**特性三：面积比例**

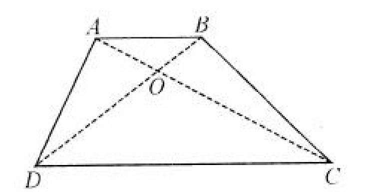
**两个三角形，如果高相等，那么其面积之比就等于其底边长之比。**以前三图（图二和图三是梯形）为例，△ABC 与△ABD 的高是相等的，那么这两个三角形的面积之比，在图一中就是 BC 与 BD 之比，在图二中就是 BC 与 AD 之比，在图三中就是 1：1。




连接任意一个四边形各边中点（见图四），所得的四边形叫作中点四边形，**不管原四边形的形状怎样改变，中点四边形的形状始终是平行四边形，并且其面积是原四边形的一半。**

20. 如图，在梯形 ABCD 中，AB 与 CD 平行，O 为 AC 与 BD 的交点，CO= 2AO，则梯形 ABCD 与三角形 AOB 的面积之比为（　　）。

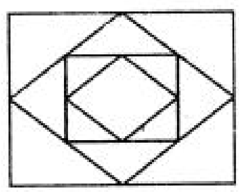
A.6 ：1　　　　B.7 ：1




C.8 ：1　　D.9 ：1

21. 小王近期正在装修新房，他计划将长 8 米、宽 6 米的客厅按右图所示分别在各边中点连线形成的四边形内铺设不同花色的瓷砖，则需要为最里侧的四边形铺设多少平方米的瓷砖？（　　）

A.3　　　　B.6

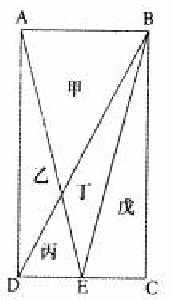


C.12　　　　D.24

22. 一块种植花卉的矩形土地如图所示，AD 边长是 AB 的 2 倍，E 为 CD 边的中点，甲、乙、丙、丁、戊区域分别种植白花、红花、黄花、紫花、白花。问种植白花的面积占矩形土地面积的（　　）。

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{7}{12}$　　D. $\frac{1}{2}$




**特性四:几何最值**

1.平面图形中，若周长一定，越接近于圆，面积越大；

2.平面图形中，若面积一定，越接近于圆，周长越小；

3.立体图形中，若表面积一定，越接近于球，体积越大；

4.立体图形中，若体积一定，越接近于球，表面积越小。

**特性五：三边关系**

三角形三边关系：两边之和大于第三边，两边之差小于第三边。

**特性六：勾股定理**

**勾股定理：$a^2+b^2=c^2$（其中 a, b 为直角边，c 为斜边）。**

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 常用勾股数（黑框内成比例） | 直角边 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | | 5 | 10 | | 7 | | 8 |
| | 直角边 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | | 12 | 24 | | 24 | | 15 |
| | 斜边 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | | 13 | 26 | | 25 | | 17 |

# 题目参考答案及解析

1. B。[解析]最初始的状态下，长方形的右端距离 A 为 4 厘米，即 AB 的长度。当这个距离变成 46 厘米的时候，说明这个长方形需要向右移动 46-4= 42 （厘米）。因为长方形的长和宽分别为 4 厘米、3 厘米，所以每 2 秒这个长方形向右移动 4+3= 7（厘米），那么移动 42 厘米需要的时间为 42÷7×2=12（秒）。

2. A。[解析]机器人每走 1 米后右转 18 度，回到原点的时候，其路径应该为一正多边形，并且其内角应该为（180-18）度，而正 n 边形的内角和应该为（n-2）×180 度，除以 n 得到正 n 边形每个内角的度数:（180-360/n）度，所以我们得到：180- 360/n=180-18，则 n=360/18=20,是一个正二十边形，边长为 1 米，所以周长为 20 米。即该机器人所走的总路程为 20 米。

本题也可以理解为：每次右转 18 度，转了 20 次后正好转了一圈 360 度，回到原点。

3. B。[解析]$\frac{\pi}{6}$、$\frac{\pi}{4}$、$\frac{\pi}{3}$分别为 30°、45°、60°（π在这里是弧度。弧长/半径=弧度。比如：一个半径为 r 的圆,它的周长是 2πr,那么这个圆得弧度就是 2πr/r=2π，所以对应一个 360°的圆弧度是 2π,也就是说弧度和度数是可以转化的,转化的比例就是π=180°）

如下图所示：

图 1：30°角所对的直角边是斜边的一半，所以风筝高为 30 米；

图 2：斜边是直角边的$\sqrt{2}$倍，所以风筝高为 $50\div\sqrt{2}=25\sqrt{2}$≈35.4（米）；

图 3：斜边是 40 米，所以与 60º角相邻的直角边是 20 米，那么风筝高是 $20\sqrt{3}$≈34.6（米）；

所以风筝最高的是第二位选手，即老侯。

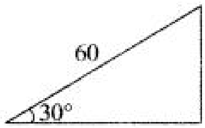


图 1

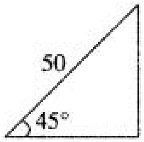


图 2

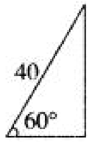
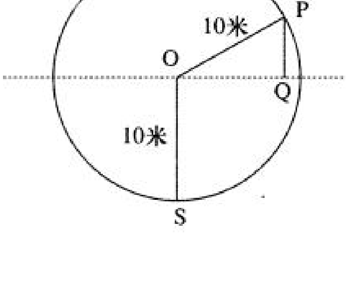


图 3

牢记：$\sqrt{2}$≈1.414，$\sqrt{3}$≈1.732。或者在比较根式大小时，同时平方消掉根号再比较即可。

4. D。[解析]我们分多步来完成本题：

① 如图所示，O 点是摩天轮的圆心，因为半径为 10 米，而最底部 S 距离地面为 0.1 米，所以 O 点离地面的高度应该是 10.1 米。



② 摩天轮旋转一周需要 2 分钟，合 120 秒，所以当摩天轮启动旋转 40 秒之后，小浩应该从 S 点出发，转到了 $40\div120=\frac{1}{3}$ 圈的地方，如图中 P 点所示，那么∠POS 就应该是$\frac{1}{3}$个圆周角，即 120 度。

③ 们作一条过圆心的水平线，如图中虚线所示，过 P 点作这条水平虚线的垂线，垂足为 Q，那么∠POQ 应该是 30 度，那么 PQ 应该是 OP 的一半，即 5 米。

④ 据上一步，P 点的垂直高度比圆心 O 点高 5 米，那么小浩此时所在的 P 点距离地面的高度应该是 10.1+5 =15.1（米）。

5. B。[解析]如图所示，小张从 A 点走到了 B 点，CD 代表彩色灯带。从 A 点仰望灯带，C、D 两点的仰角分别为 75° 和 60° ，那么说明图中∠DAB=60° ，∠DAC=15° 。小张的速度 3.6 千米/小时=1 米/秒，从 A 点到 B 点恰好 5 秒，所以可知 AB＝5 米。在直角△ABD 中，∠ADB=30° ，那么 AD 的长应该是 AB 长的两倍，即 AD=10 米。∠ADB 是∠ADC 的一个外角，所以∠ADB=∠DAC＋∠C，进而可得∠C=15° ，与∠DAC 相等，所以△ADC 是一个等腰三角形，则 CD=AD=10 米。

6. B。[解析]如图所示，假设老王从 A 点出发按顺时针方向跑步。因为正六边形的边长为 50 米，则老王跑 500 米（恰好 10 个边长）后，他的位置应在 C 点，则所求距离为线段 AC 的长度。过 B 点作 BD ⊥ AC。因为正六边形的内角为 120° ，那么在直角△ABD 中，∠BAD=30° ，所以 BD 的长应该是 AB 长的一半，即 25 米，而 AD 的长应该是 BD 长的$\sqrt{3}$倍，即 $25\sqrt{3}$米，所以 AC=$50\sqrt{3}$米。

7. D。[解析]长方形的面积为 8×6=48(平方厘米)，那么重叠部分面积应该是 $48\times\frac{1}{2}=24$（平方厘米），所以圆的面积应该为 $24\div\frac{2}{3}=36$（平方厘米）。

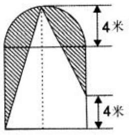
8. C。[解析]据图分析可知，这个大长方形的宽，既等于小长方形宽的 3 倍，也等于小长方形长的 2 倍，所以可以假设大长方形的宽为 6a 厘米，那么小长方形的长和宽应该分别为 3a 厘米、2a 厘米，进而算得大长方形的长为：3a+2a+3a=8a（厘米）。所以，大长方形的周长为：（8a+6a）×2 = 112，解得 a =4，所以大长方形的面积为：8a×6a=768（平方厘米）。

9. A。[解析]设阴影长方形的长和宽分别为 x，y 厘米，那么：

$$\begin{cases}4x+4x+4y+4y=320\\x^2+x^2+y^2+y^2=1700\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y=40\\x^2+y^2=850\end{cases}\Rightarrow xy=\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2}=375$$

10. B。[解析]换算时间：10 小时为 600 分钟，每分钟可抽水 1 立方米，所以这个蓄水池的体积应该是 600 立方米，假设其宽为 a 米，那么其长应该是 2a 米，则有 a×2a×3＝600，解得 a=10。

11. D。[解析]甲容器的水深为 10 厘米，倒出一半之后水深为 5 厘米。假设甲、乙容器的底面积分别为 2a、3a 平方厘米，再设乙容器中水的高度增加了 x 厘米，根据体积相等可知：2a×5 = 3a×x,得到 $x=\frac{10}{3}$，所以乙容器中现在的水深为 $5+\frac{10}{3}=\frac{25}{3}$（厘米），那么此时两个容器中的水深之比应该为：$5:\frac{25}{3}=3:5$。

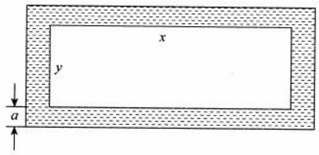
12. C。[解析]阴影部分的面积=半圆面积+正方形面积-空白部分面积。空白部分为不规则的图形，但经过半圆的中点和正方形底边的中点作一条垂线，可将空白部分的不规则图形分割为一个直角三角形和一个直角梯形，如右图所示。所以阴影部分面积=半圆面积+正方形面积-直角三角形面积-直角梯形面积=$0.5\times\pi\times4^2+8^2-0.5\times4\times12-0.5\times(4+12)$ 

$\times4=8+8\pi$（平方米）。

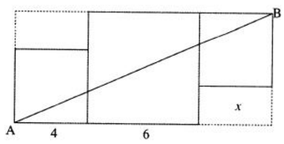
13. B。[解析]如下图所示，假设花园的长、宽分别为 x、y 米，环路的宽为 a 米，则有：

$$\begin{cases} 2\times(x+y)=100 \\ (x+2a)(y+2a)-xy=600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)=50 \\ xy+2a(x+y)+4a^2-xy=600 \end{cases}$$

$\Rightarrow a^2+25a-150=0\Rightarrow(a+30)(a-5)=0\Rightarrow a=5$



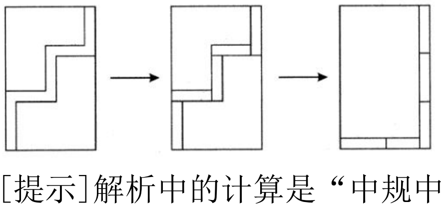

提示：环路本身不是规则图形，但环路的面积恰好是上图中大、小长方形面积的差值。因为环路的宽为 a 米，所以长方形的长、宽分别比小长方形的长、宽多 2a 米。这个方程组两个方程有三个未知数，但可以将第一个方程的 x+y=50 直接代入第二个方程，得到一个只含 a 的一元二次方程。

14. B。[解析]我们以 AB 为对角线将原图形补成一个完整的大长方形（如下图所示），对角线 AB 将这个大长方形分成了两个完全相同的部分，再结合题意，AB 将原来的图形也分成了面积相等的两个部分，所以图中补齐的两个部分（左上角和右下角的小长方形）应该面积相等，即：4×（6-4）=x×（6-x），解得 x=2 或者 x=4 

。

[提示]根据对称性可知，如果 x=4，那么原图形肯定是对称的，也肯定满足题干条件。

15. A。[解析]如图所示，我们可以将这条 1 米宽的水泥板路，分割成五小段，然后将竖直方向的小段平移到最右侧，水平方向的小段平移到最下侧，于是剩下的铺草皮的区域就成了 一个较小的长方形。整个长方形面积为：100×30=3000（平方米），草皮部分所占面积为（100-2）×（30-2）=2744（平方米），所以水泥板走道面积为 3000- 2744=256（平方米），所以整个花费应该为：2744×50+256×40=147440（平方米）。



[提示]解析中的计算是“中规中矩”的计算，需要的时间比较久，我们完全可以算得更快一些。根据上图最后一个，竖直部分的水泥板走道面积为 2×100=200（平方米），水平部分的水泥板走道面积为 2×（30-2）=56（平方米），所以水泥板走道总面积为 256 平方米。假如全部都是草皮，造价为 50×100×30=150000（元），每平方米水泥板比草皮便

宜 10 元，那么 256 平方米的水泥板应该可以便宜 2560 元，所以实际造价为 150000-2560=147440（元）。显然，这样的计算方式，计算小了很多。

16. C。[解析]切割后得到的两部分，其表面积之和，应该等于原来的长方体表面积加上两个切面的面积，所以要使切面尽可能地大，那么我们要沿着一个“对角面”来切。

而“对角面”有三种不同的选择，以 8 为一条边，并以 3 和 5 所在的面的对角线为另外一条边，这样得到的“对角面”面积是最大的，其面积为：$\sqrt{3^2+5^2}\times8=8\sqrt{34}$。由此可以算得，两部分表面积之和为：2×（3×5 + 5× 8 + 8×3 + 8$\sqrt{34}$= 158 + 16$\sqrt{34}$。

[提示]不同的对角面，其面积和周长是不一样的，大家需要牢记这个结论：以最长边为一条边，两条较短边所在面的对角线为另外一条边，得到的对角面的面积和周长都是最大的；以最短边为一条边，两条边长边所在面的对角线为另外一条边，得到的对角面的面积和周长都是最小的。其实本题算得对角面面积含有$\sqrt{34}$的时候，答案已经非常明显了。

17. A。[解析]假设正方体的棱长为 a,因为这个角的截面三角形面积是确定的，要想 a 尽可能小，那么就这个截面就应该尽可能大，如右图所示就是正方体一个角截面最大的情况。因为正方体的棱长为“那么截面三角形每条边长都应该是所以其面积应该是 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times$（$\sqrt{2}$a）$^2=100\sqrt{3}$，得到 a=10$\sqrt{2}$≈14.14，所以棱长最小为 15。

18. B。[解析]假设切割后的小正方体棱长为 a，那么原来长方体的长、宽、高应该分别为 3a、a、a，其表面积应该为 2×（3a×a+a×3a+a×a）=14$a^2$，三个小正方体的表面积之和为：3×6×a×a =18$a^2$,所以：18$a^2$−14$a^2$=64，得到 a=4，所以长方体的体积为：3a×a×a=192(立方厘米)。

[提示]原长方体切割成三个正方体，需要切两刀，每一刀都产生两个切面，所以一共增加了四个切面，每个切面面积应该是 64÷4=16（平方厘米），所以切面最长应该是 4 厘米。

19. C。[解析]表面积变为原来 1.96 倍，则棱长为原来的$\sqrt{1.96}$ =1.4 倍，增加了 40%。

20. D。[解析]设△ABO 的面积为 1，因为 AB//CD，则△ABO 和△CDO 是相似的，后者尺寸是前者的 2 倍，所以△CDO 的面积是 4。△OBC 和△ABO 高相同，所以面积比是底边长之比，那么△OBC 的面积是 2，同理△ADO 的面积也是 2，进而知道整个梯形的面积为 9，所求面积之比为 9：1。

21. B。[解析]每一次中点连线，得到的四边形面积为原来的$\frac{1}{2}$，则最里侧的四边形面积应该是最外面四边形面积的$\frac{1}{8}$，所以面积为：8×6×$\frac{1}{8}$ = 6（平方米）。

22. C。[解析]赋值丙的面积为 1，因为甲和丙是相似三角形，并且 AB 是 DE 的两倍，所以得到两个结论：①甲的面积为 4；②甲和丙的另外两对对应边也是 2 倍关系。我们再看丙和丁，两者高相等，底边是 2 倍关系（由上面结论②得到），所以丁的面积应该是 2；同理，乙的面积也是 2。再看戊，戊和“丙+丁”是等底等高的关系，所以戊的面积为 3。于是，我们发现矩形土地总面积应该是 1+4+2+2+3=12，种植白花的面积为 4+3=7，占比为$\frac{7}{12}$。

# 附录：强化练习答案

## 强化练习一答案

| | 3736 | 9483 | 3847 | 4837 | 847 | 784 | 8739 | 889 | 6735 | 1203 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 0 | 3 | 3 | 1 | 3 | 0 | 3 | 1 | 3 | 3 |
| 8 | 0 | 3 | 7 | 5 | 7 | 0 | 3 | 1 | 7 | 3 |
| 3 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 9 | 1 | 6 | 4 | 4 | 1 | 1 | 0 | 7 | 3 | 6 |

## 强化练习二答案

| | 20 | 24 | 28 | 30 | 35 | 40 | 42 | 48 | 56 | 60 | 72 | 80 | 96 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20 | — | 120 | 140 | 60 | 140 | 40 | 420 | 240 | 280 | 60 | 360 | 80 | 480 |
| 24 | 4 | — | 168 | 120 | 840 | 120 | 168 | 48 | 168 | 120 | 72 | 240 | 96 |
| 28 | 4 | 4 | — | 420 | 140 | 280 | 84 | 336 | 56 | 420 | 504 | 560 | 672 |
| 30 | 10 | 6 | 2 | — | 210 | 120 | 210 | 240 | 840 | 60 | 360 | 240 | 480 |
| 35 | 5 | 1 | 7 | 5 | — | 280 | 210 | 1680 | 280 | 420 | 2520 | 560 | 3360 |
| 40 | 20 | 8 | 4 | 10 | 5 | — | 840 | 240 | 280 | 120 | 360 | 80 | 480 |
| 42 | 2 | 6 | 14 | 6 | 7 | 2 | — | 336 | 168 | 420 | 504 | 1680 | 672 |
| 48 | 4 | 24 | 4 | 6 | 1 | 8 | 6 | — | 336 | 240 | 144 | 240 | 96 |
| 56 | 4 | 8 | 28 | 2 | 7 | 8 | 14 | 8 | — | 840 | 504 | 560 | 672 |
| 60 | 20 | 12 | 4 | 30 | 5 | 20 | 6 | 12 | 4 | — | 360 | 240 | 480 |
| 72 | 4 | 24 | 4 | 6 | 1 | 8 | 6 | 24 | 8 | 12 | — | 720 | 288 |
| 80 | 20 | 8 | 4 | 10 | 5 | 40 | 2 | 16 | 8 | 20 | 8 | — | 480 |
| 96 | 4 | 24 | 4 | 6 | 1 | 8 | 6 | 48 | 8 | 12 | 24 | 16 | — |

## 强化练习三答案

| 数字一 | 8 | 9 | 8 | 14 | 72 | 54 | 42 | 21 | 108 | 150 | 4.8 | 9/4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 数字二 | 10 | 15 | 9 | 35 | 15 | 27 | 70 | 63 | 144 | 324 | 3.2 | 63/20 |
| 数字三 | 12 | 20 | 12 | 60 | 40 | 96 | 105 | 168 | 180 | 120 | 12.8 | 35/6 |
| 最小公倍数 | 120 | 180 | 72 | 420 | 360 | 864 | 210 | 504 | 2160 | 16200 | 38.4 | 157.5 |

## 强化练习四答案

1. x=2　2. x=3　3. x=1　4. x=3　5. x=1.2

6. x=1.5　7. x=3　8. x=4　9. x=8　10. x=4

11. $\begin{cases}x=6\\y=1\end{cases}$　12. $\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}$　13. $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$　14. $\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$　15. $\begin{cases}x=5\\y=1\end{cases}$

16. $\begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}$　17. $\begin{cases}x=6\\y=5\end{cases}$　18. $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$　19. $\begin{cases}x=4\\y=2\end{cases}$　20. $\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$

21. $\begin{cases}x=1\\y=2\\z=3\end{cases}$　22. $\begin{cases}x=3\\y=1\\z=4\end{cases}$　23. $\begin{cases}x=2\\y=3\\z=-1\end{cases}$　24. $\begin{cases}x=5\\y=4\\z=3\end{cases}$　25. x=2

26. x=5　27. x=2　28. x=4　29. $\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$　30. $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

31. $\begin{cases} x=7 \\ y=-3 \end{cases}$ 32. $\begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ 33. $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ 34. $\begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases}$ 35. $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

36. $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ 37. x+y+z=3 38. x+y+z=2 39. x=60 40. x=7